Richtungsableitungen.

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\mathbf{x}^0 \in D$, *und* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *ein Vektor. Dann heißt*

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

die Richtungsableitung *(*Gateaux-Ableitung*) von* $f(\mathbf{x})$ *in Richtung* $\mathbf{v}$. □

Beispiel: Betrachte $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung von $f(x, y)$ in Richtung $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^2 + (y+t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t} \\ &= 2(x+y). \end{aligned}$$

□

Bemerkungen.

- Für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ist die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{v}$ gegeben durch die partielle Ableitung nach Koordinatenrichtung x_i:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0).$$

- Ist $\mathbf{v}$ ein Einheitsvektor, also $\|\mathbf{v}\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ den Anstieg (bzw. die Steigung) von $f(\mathbf{x})$ in Richtung $\mathbf{v}$.

- Ist $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ und mit $\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$ gilt

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h})\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{h}'(0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v}.$$

  Dies folgt unmittelbar aus der Anwendung der Kettenregel.

$\square$

Eigenschaften des Gradienten.

Satz: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, in* $\mathbf{x}^0 \in D$ *differenzierbar. Dann gilt:*

(a) Der Gradientenvektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ *steht senkrecht auf der* Niveaumenge

$$N_{\mathbf{x}^0} := \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ *nennt man die Niveaumengen auch* Höhenlinien, *und im Fall* $n = 3$ *heißen die Niveaumengen auch* Äquipotentialflächen.

(b) Der Gradient $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)$ *ist die Richtung des steilsten Anstiegs von* f *in* $\mathbf{x}^0$.

Beweisidee:

(a) Kettenregel: $f(x(t)) \equiv f(\mathbf{x}^0)$, somit $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) = 0$;

(b) Für beliebige Richtung $\mathbf{v}$ gilt mit Cauchy-Schwarzscher Ungleichung

$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)| = |(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0), \mathbf{v})| \leq \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2$$

Gleichheit wird für *Maximum* $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)/\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)\|_2$ angenommen. $\square$

Krummlinige Koordinaten.

Definition: *Sei* $\Phi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine* C^1*-Abbildung, für die die Jacobimatrix* $\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}^0)$ *an jeder Stelle* $\mathbf{u}^0 \in U$ *regulär ist. Weiterhin existiere die Umkehrabbildung* $\Phi^{-1} : V \to U$*, und diese sei ebenfalls eine* C^1*-Abbildung. Dann definiert* $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ *eine* `Koordinatentransformation` *von den Koordinaten* $\mathbf{u}$ *auf die Koordinaten* $\mathbf{x}$*.* $\square$

Beispiel (`Polarkoordinaten`)**:** Betrachte für $n = 2$ die `Polarkoordinaten` $\mathbf{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

mit den `kartesischen Koordinaten` $\mathbf{x} = (x, y)$. $\square$

Umrechnung partieller Koordinatenableitungen.

Für alle $\mathbf{u} \in U$ mit $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{u})) &= \mathbf{u} \\ \mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) &= \mathbf{I}_n \qquad \text{(Kettenregel)} \\ \mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{J}\,\Phi(\mathbf{u}))^{-1} \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(\mathbf{u}) := \tilde{f}(\Phi(\mathbf{u}))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} \qquad \mathbf{G}(\mathbf{u}) = (g^{ij}) = (\mathbf{J}\,\Phi(\mathbf{u}))^T.$$

Notationen.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j},$$

wobei

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} = (\mathbf{J}\,\Phi)^{-T} = (\mathbf{J}\,\Phi^{-1})^{T}.$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf Φ^{-1}. $\square$

Beispiel: Polarkoordinaten.

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathbf{J}\,\Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Polarkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Umrechnung des Laplace-Operators auf Polarkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel: Kugelkoordinaten.

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann gegeben durch

$$\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Partielle Ableitungen für die Kugelkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\cos\varphi\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\sin\varphi\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

Beispiel: Umrechnung des `Laplace-Operators` auf Kugelkoordinaten:

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan\theta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}.
$$

□

17.3 Mittelwertsätze und Taylor-Entwicklungen

Satz (Mittelwertsatz): *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine auf einer offenen Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *differenzierbare, skalare Funktion. Weiterhin seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ *Punkte in* D, *so dass die Verbindungsstrecke*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1]\}$$

ganz in D *liegt. Dann gibt es eine Zahl* $\theta \in (0, 1)$ *mit*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \operatorname{grad}(f)(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Beweis: Wir setzen

$$h(t) := f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$$

Aus dem Mittelwertsatz für *eine* Veränderliche folgt dann mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= h(1) - h(0) = h'(\theta) \cdot (1 - 0) \\ &= \operatorname{grad}(f)(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

■

Definition und Beispiel.

Definition: *Gilt* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset D$ *für* **alle** *Punkte* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$*, so heißt* D `konvex`. □

Beispiel zum Mittelwertsatz: Gegeben sei die skalare Funktion

$$f(x, y) := \cos(x) + \sin(y)$$

Offensichtlich gilt

$$f(0,0) = f(\pi/2, \pi/2) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(\pi/2, \pi/2) - f(0,0) = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\operatorname{grad}(f)(\theta(\pi/2, \pi/2)) \cdot (\pi/2, \pi/2) = 0$$

In der Tat gilt diese Beziehung für $\theta = \frac{1}{2}$. □

Mittelwertsatz gilt nur für skalare Funktionen.

Beachte: Der Mittelwertsatz für mehrere Variablen gilt für **skalare** Funktionen, aber i.a. nicht für **vektorwertige** Funktionen!

(Gegen)Beispiel: Betrachte die **vektorwertige** Funktion

$$\mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \pi/2]$$

Nun gilt

$$\mathbf{f}(\pi/2) - \mathbf{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}'\left(\theta \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta\pi/2) \\ \cos(\theta\pi/2) \end{pmatrix}$$

ABER: Die Vektoren auf der rechten Seite haben die Längen $\sqrt{2}$ bzw. $\pi/2$! $\square$

Der Mittelwert-Abschätzungssatz.

Satz (Mittelwert-Abschätzungssatz): *Die Funktion* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ *sei differenzierbar auf der offenen Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$. *Weiterhin seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *Punkte in* D *mit* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset D$. *Dann gibt es ein* $\theta \in (0, 1)$ *mit*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|_2 \leq \|\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|_2$$

Beweis: Für $g(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$, mit festem $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, gilt

$$\mathrm{grad}(g)(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = \mathrm{grad}(g)(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

und somit gilt $\mathbf{v}^T(\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = \mathbf{v}^T \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt hiermit

$$|\mathbf{v}^T(\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}))| \leq \|\mathbf{v}\|_2 \cdot \|\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|_2.$$

Für $\mathbf{v} := \mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ folgt hieraus die Behauptung. $\blacksquare$