

18.2 Implizit definierte Funktionen

Ziel: Untersuche Lösungsmengen von *nichtlinearen* Gleichungssystemen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

mit $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h. betrachte m Gleichungen für n Unbekannte mit

$$m < n,$$

d.h. wir haben **weniger** Gleichungen als Unbekannte. Man nennt dann das Gleichungssystem **unterbestimmt** und die Lösungsmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ enthält gewöhnlich *unendlich* viele Punkte. □

Auflösbarkeit von (nichtlinearen) Gleichungen.

Frage: Kann man das System $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ nach bestimmten Unbekannten, zum Beispiel den letzten m Variablen x_{n-m+1}, \dots, x_n , **auflösen**?

Mit anderen Worten: Existiert eine Funktion $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_{n-m})$ mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \iff \quad (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{n-m}).$$

Terminologie: “**Auflösen**” bedeutet also die letzten m Variablen durch die ersten $n - m$ Variablen zu beschreiben.

Weitere Frage: Nach welchen m Variablen lässt sich das Gleichungssystem auflösen? Ist die Auflösung *global* auf dem Definitionsbereich D möglich oder nur *lokal* auf einer Teilmenge $\tilde{D} \subset D$?

Geometrische Interpretation: Die Lösungsmenge G von $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ lässt sich (zumindest lokal) als Graph einer Funktion \mathbf{f} darstellen. □

Beispiel.

Die Kreisgleichung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{für } r > 0$$

definiert ein **unterbestimmtes** nichtlineares Gleichungssystem, denn wir haben **zwei** Unbekannte (x, y) , aber nur **eine** Gleichung.

Die Kreisgleichung lässt sich **lokal** auflösen und definiert dabei vier Funktionen:

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} && \text{für } -r \leq x \leq r \\ x &= \pm\sqrt{r^2 - y^2} && \text{für } -r \leq y \leq r \end{aligned}$$

□

Beispiel.

Sei $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ eine **affin-lineare** Funktion, d.h. \mathbf{g} hat die Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{für } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Wir spalten die Variable \mathbf{x} in zwei Vektoren auf

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, \dots, x_{n-m})^T \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^{(2)} = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^m$$

Aufspaltung der Matrix $\mathbf{C} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}]$ ergibt die Darstellung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Das Gleichungssystem $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ist genau dann nach den Variablen $\mathbf{x}^{(2)}$ (eindeutig) auflösbar, falls \mathbf{A} regulär ist:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \iff \quad \mathbf{x}^{(2)} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}) =: \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}).$$

□

Fortsetzung des Beispiels.

Frage: Wie kann man die Matrix \mathbf{A} in Abhängigkeit von \mathbf{g} schreiben?

Aus der Darstellung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

erkennt man direkt, dass

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^{(2)}}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

gilt, d.h. \mathbf{A} ist die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

für festes $\mathbf{x}^{(1)}$!

Fazit: Auflösbarkeit ist somit gegeben, falls die Jacobi-Matrix regulär ist. \square

Satz über implizite Funktionen.

Satz: Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Variablen in D seien (\mathbf{x}, \mathbf{y}) mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Der Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in D$ sei eine Lösung von $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$. Falls die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \end{pmatrix}$$

regulär ist, so gibt es Umgebungen U von \mathbf{x}^0 und V von \mathbf{y}^0 , $U \times V \subset D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{f} : U \rightarrow V$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U.$$

und

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right).$$

Beispiel.

Für die Kreisgleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $r > 0$, findet man im Punkt $(x^0, y^0) = (0, r)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, r) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, r) = 2r \neq 0$$

Man kann also in einer Umgebung von $(0, r)$ die Kreisgleichung nach y auflösen:

$$y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Ableitung $y'(x)$ kann man durch **implizite Differentiation** berechnen:

$$g(x, y(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_x(x, y) + g_y(x, y)y'(x) = 0$$

also

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

□

Weiteres Beispiel. Betrachte die Gleichung

$$g(x, y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0.$$

Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{y-x} + 3 > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion. Implizite Differentiation liefert

$$e^{y-x}(y' - 1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Erneute Differentiation liefert

$$e^{y-x}y'' + e^{y-x}(y' - 1)^2 + 3y'' + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{2 + e^{y-x}(y' - 1)^2}{e^{y-x} + 3}.$$

ABER: Explizites Auflösen nach y ist in diesem Fall nicht möglich!

Stattdessen wertet man $y = f(x)$ numerisch aus. □

Allgemeine Bemerkung. Implizites Differenzieren einer durch

$$g(x, y) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

implizit definierten Funktion $y = f(x)$, mit $x, y \in \mathbb{R}$, ergibt

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$
$$f''(x) = -\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^3}$$

Daher ist der Punkt x^0 ein *stationärer* Punkt von $f(x)$, falls gilt

$$g(x^0, y^0) = g_x(x^0, y^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(x^0, y^0) \neq 0.$$

Weiter ist x^0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls

$$\frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} > 0 \quad \left(\text{bzw. } \frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} < 0 \right).$$

Implizite Darstellung ebener Kurven.

Betrachte die Lösungsmenge einer skalaren Gleichungen

$$g(x, y) = 0$$

Falls gilt

$$\text{grad}(g) = (g_x, g_y) \neq 0$$

so definiert $g(x, y)$ lokal eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = \bar{f}(y)$.

Definition: Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x, y) = 0$ mit

- $\text{grad}(g)(x^0, y^0) \neq 0$ heißt **regulärer Punkt**.
- $\text{grad}(g)(x^0, y^0) = 0$ heißt **singulärer Punkt**.



Horizontale und vertikale Tangenten.

Bemerkung:

(a) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathbf{x}^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(\mathbf{x}^0) \neq 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine **horizontale Tangente** in \mathbf{x}^0 .

(b) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathbf{x}^0) \neq 0 \quad \text{und} \quad g_y(\mathbf{x}^0) = 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine **vertikale Tangente** in \mathbf{x}^0 .

(c) Ist \mathbf{x}^0 ein **singulärer Punkt** so wird die Lösungsmenge bei \mathbf{x}^0 “in zweiter Näherung” durch folgende **quadratische Gleichung** approximiert.

$$g_{xx}(\mathbf{x}^0)(x - x^0)^2 + 2g_{xy}(\mathbf{x}^0)(x - x^0)(y - y^0) + g_{yy}(\mathbf{x}^0)(y - y^0)^2 = 0$$

Bemerkungen.

Wegen (c) erhält man für $g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} \neq 0$:

$\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) > 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **isolierter Punkt** der Lösungsmenge

$\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) < 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **Doppelpunkt**

$\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) = 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **Rückkehrpunkt** bzw. eine **Spitze**.

Geometrische Interpretation:

- (a) Gilt $\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) > 0$, so sind beide Eigenwerte von $\mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)$ entweder strikt positiv oder strikt negativ, d.h. \mathbf{x}^0 ist ein strenges lokales **Minimum** oder **Maximum** von $g(\mathbf{x})$.
- (b) Gilt $\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) < 0$, so haben die beiden Eigenwerte von $\mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)$ unterschiedliche Vorzeichen, d.h. \mathbf{x}^0 ist ein **Sattelpunkt** von $g(\mathbf{x})$.
- (c) Gilt $\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) = 0$, so ist der stationäre Punkt \mathbf{x}^0 von $g(\mathbf{x})$ **ausgeartet**.

□

Beispiel 1.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x - 2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2 - 4x$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x - 4$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein **isolierter Punkt**. □

Beispiel 2.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2 + 2xq^2$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x + 2q^2$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ für $q \neq 0$ ein **Doppelpunkt**. □

Beispiel 3.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine **Spitze** (bzw. **Rückkehrpunkt**). □