19.2 Kurvenintegrale

Für eine stückweise C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \to D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und eine stetige *skalare* Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hatten wir das `Kurvenintegral 1. Art` definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x})\, ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet. Weiterhin heißt

$$ds := \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt$$

das `Bogenelement` der Kurve $\mathbf{c}(t)$.

Erweiterung: Kurvenintegrale über *vektorwertige* Funktionen, d.h.

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := ? \qquad \text{für } \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$$

Anwendung: Ein Massenpunkt bewegt sich entlang $\mathbf{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Frage: Welche *physikalische Arbeit* muss entlang der Kurve geleistet werden?

Kurvenintegrale zweiter Art.

Definition: *Für ein stetiges Vektorfeld* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und eine stückweise* C^1*-Kurve* $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ *definieren wir das* `Kurvenintegral 2. Art` *durch*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt$$

□

Herleitung: Approximiere die Kurve durch Streckenzug mit Ecken $\mathbf{c}(t_i)$, wobei

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist. Dann gilt für die in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$ geleistete Arbeit die Näherungsformel:

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_i)), \mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i) \rangle.$$

□

Fortsetzung der Herleitung.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))(c_j(t_{i+1})-c_j(t_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))\dot{c}_j(\tau_{ij})(t_{i+1}-t_i) \end{aligned}$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \to 0$ konvergiert die rechte Seite gegen das oben definierte **Kurvenintegral 2. Art**

$$\int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle \, dt.$$

Bemerkung: Für eine geschlossene Kurve $\mathbf{c}(t)$, d.h. $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, schreibt man

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

Eigenschaften des Kurvenintegrals zweiter Art.

(a) Linearität:

$$\int_{\mathbf{c}} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \beta \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

(b) Es gilt:

$$\int_{-\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

wobei $(-\mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$, den inversen Weg bezeichnet.

(c) Es gilt:

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

wobei $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ den aus $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ zusammengesetzten Weg bezeichnet, so dass der Endpunkt von $\mathbf{c}_1$ der Anfangspunkt von $\mathbf{c}_2$ ist. $\square$

Weitere Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art.

(d) Das Kurvenintegral 2. Art ist parametrisierungsinvariant.

(e) Es gilt:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{T}(t)\rangle \, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt = \int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T}\rangle \, ds$$

mit dem Tangenten-Einheitsvektor $\mathbf{T}(t) := \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ für $\dot{c}(t) \neq 0$.

(f) Formale Schreibweise:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x})\, dx_i$$

mit

$$\int_{\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x})\, dx_i := \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t))\dot{c}_i(t)\, dt$$

Beispiel.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &:= (-y, x, z^2)^T \\ \mathbf{c}(t) &:= (\cos(t), \sin(t), at)^T \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}} (-y\,dx + x\,dy + z^2 dz) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(-\sin(t))(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) + a^2t^2a\right]\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + a^3t^2)\, dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3}(2\pi)^3 \end{aligned}$$

□

Die Zirkulation eines Feldes längs einer Kurve.

Definition: *Ist* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral*

$$\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

entlang einer geschlossenen Kurve die Zirkulation *des Feldes* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. □

Beispiel: Für das Feld $\mathbf{u}(x,y) = (y,0)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (r\cos(t), 1 + r\sin(t))^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, die Zirkulation

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r\sin(t))(-r\sin(t))\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r\sin(t) - r^2\sin^2(t))\,dt \\ &= \left[r\cos(t) - \frac{r^2}{2}(t - \sin(t)\cos(t)) \right]_0^{2\pi} = -\pi r^2 \end{aligned}$$

□

Wirbelfreie Vektorfelder.

Definition: *Ein stetiges Vektorfeld* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, *heißt* wirbelfrei, *falls dessen Kurvenintegral längs* **aller** *geschlossenen stückweise* C^1*-Kurven* $\mathbf{c}(t)$ *in* D *verschwindet, d.h.*

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \qquad \text{für alle geschlossenen } \mathbf{c}.$$

□

Bemerkung: Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve $\mathbf{c}$ abhängt. In diesem Fall nennt man das Kurvenintegral wegunabhängig. □

Frage: Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **garantieren** die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

Zusammenhängende Gebiete.

Definition: *Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt* zusammenhängend, *falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise C^1-Kurve verbunden werden können:*

$$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 \in D \ : \ \exists \mathbf{c} : [a, b] \to D \quad : \quad \mathbf{c}(a) = \mathbf{x}^0 \wedge \mathbf{c}(b) = \mathbf{y}^0$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein Gebiet *in $\mathbb{R}^n$.* □

Bemerkung: Eine **offene** Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **nicht** zusammenhängend, wenn es **disjunkte**, offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$U_1 \cap D \neq \emptyset, \quad U_2 \cap D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cup U_2$$

Nicht zusammenhängende offene Mengen sind also

– im Gegensatz zu zusammenhängende Mengen –

in (zumindest) zwei disjunkte offene Mengen trennbar. □

Gradientenfelder, Stammfunktionen, Potentiale.

Definition: *Sei* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ *ein Vektorfeld auf einem Gebiet* $D \subset \mathbb{R}^n$*. Das Vektorfeld* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *nennt man ein* Gradientenfeld*, falls es eine skalare* C^1*-Funktion* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *gibt mit*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}).$$

Die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ *heißt dann* Stammfunktion *oder* Potential *von* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$*, und das Vektorfeld* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *nennt man* konservativ*.* □

Bemerkung: Ein Massenpunkt bewege sich in einem konservativen Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, d.h. $\mathbf{K}$ besitzt ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so dass $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Dann liefert die Funktion $U(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ die potentielle Energie

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x})$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathbf{x}}$, so folgt:

$$m\langle\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\rangle + \langle\nabla U(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x})\right) = 0$$

Hauptsatz für Kurvenintegrale.

Satz (Hauptsatz für Kurvenintegrale)**:** *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ein stetiges Vektorfeld auf* D.

(a) *Besitzt* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ein Potential* $\varphi(\mathbf{x})$, *so gilt für alle stückweisen* C^1*-Kurven* $\mathbf{c} : [a, b] \to D$*:*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{c}(b)) - \varphi(\mathbf{c}(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ist wirbelfrei.*

(b) *Umgekehrt gilt: Ist* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *wirbelfrei, so besitzt* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ein Potential* $\varphi(\mathbf{x})$. *Ist* $\mathbf{x}^0 \in D$ *ein fester Punkt und bezeichnet* $\mathbf{c}_\mathbf{x}$ *(für* $\mathbf{x} \in D$*) eine beliebige, die Punkte* $\mathbf{x}^0$ *und* $\mathbf{x}$ *verbindende stückweise* C^1*-Kurve in* D, *so ist* $\varphi(\mathbf{x})$ *gegeben durch*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{c}_\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \text{const.}$$

□

Beweis des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

(a): Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Gradientenfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}} \nabla\varphi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathbf{c}(t))\,\dot{c}_i(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\varphi(\mathbf{c}(t))\,dt = \varphi(\mathbf{c}(b)) - \varphi(\mathbf{c}(a)).\end{aligned}$$

(b): Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wirbelfrei. Wir zeigen, dass $\varphi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{c}_\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ Potential von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 f_1(\mathbf{c}_1(t))\Delta x_1\,dt + \int_0^1 f_2(\mathbf{c}_2(t))\Delta x_2\,dt \\ &= f_1(\mathbf{x}+\xi_1)\Delta x_1 + f_2(\mathbf{x}+\xi_2)\Delta x_2.\end{aligned}$$

Für $\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$ bekommt man $f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, somit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$.

■

Beispiel.

Das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

besitzt das Potential

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2},$$

denn es gilt

$$\nabla U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}(x, y, z)^T = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ geleistete Arbeit gilt dann

$$A = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{K}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{c}(a)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{c}(b)\|}.$$

$\square$

Beispiel.

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{bmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz.$$

Für eine C^1-Kurve $\mathbf{c}(t)$ von $P = (1, 1, 2)$ nach $Q = (3, 5, -2)$ gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(Q) - \varphi(P) = -9 - 15 = -24$$

Interpretiert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als elektrisches Feld, so gibt das Kurvenintegral zweiter Art die Spannung zwischen den beiden Punkten P und Q an. $\square$

Beispiel.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos(t), \sin(t))^T$, $0 \le t \le 2\pi$, bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \end{aligned}$$

$\mathbf{f}(x,y)$ ist somit nicht wirbelfrei und besitzt auf D kein Potential. $\square$