19.3 Oberflächenintegrale

Definition: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^2$ *ein Gebiet und* $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ *eine* C^1*-Abbildung*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \qquad \textit{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \textit{ und } \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ *die beiden Vektoren*

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \; : \; \mathbf{u} \in D\}$$

eine Fläche *bzw. ein* Flächenstück*. Die Abbildung* $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ *nennt man dann eine* Parametrisierung *oder* Parameterdarstellung *der Fläche* F. $\square$

Beispiel.

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2,$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H.

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = (-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi), 0)^T \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = (0, 0, 1)^T$$

von $\mathbf{p}(\varphi, z)$ sind linear unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^2$. $\square$

Beispiel.

Der Graph einer skalaren C^1-Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{bmatrix} \qquad \text{für } \mathbf{u} \in D.$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{bmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{bmatrix}$$

sind linear unabhängig. $\square$

Die Tangentialebene einer Fläche.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen **tangential** an die Fläche F.

Sie spannen die Tangentialebene $T_{\mathbf{x}^0}(F)$ der Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$T_{\mathbf{x}^0}(F) \; : \; \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0) \qquad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Frage: Wie kann man den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

Das Oberflächenintegral eines Flächenstücks.

Definition: *Sei* $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ *Parameterdarstellung einer Fläche, und sei* $K \subset D$ *kompakt, messbar und zusammenhängend. Dann wird der Flächeninhalt von* $\mathbf{p}(K)$ *definiert durch das* Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{p}(K)} do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}$$

Dabei nennt man den Term

$$do := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}$$

das Oberflächenelement *der Fläche* $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$. □

Bemerkung: *Das Oberflächenintegral ist* **unabhängig** *von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt direkt aus dem Transformationssatz.* □

Beispiel.

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man mit

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z \mathrm{d}o = \int_K r \, \mathrm{d}(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi r H.$$

$\square$

Beispiel.

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

und

$$O(\mathbf{p}(K)) = \int_{\mathbf{p}(K)} \mathrm{d}o = \int_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}\, \mathrm{d}(x_1, x_2).$$

□

Beispiel.

Für die Oberfläche des Paraboloids P, gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq 2\},$$

gilt

$$\begin{aligned} O(P) &= \int_{x_1^2+x_2^2\leq 2} \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}\, d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, d\varphi\, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s}\, ds \\ &= \pi \left[\frac{1}{6}(1 + 4s)^{3/2}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{1}{6}(27 - 1)\right) = \frac{13}{3}\pi. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2.$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2.$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2).$$

$\square$

Beispiel. Für das Oberflächenelement der Sphäre

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \qquad \text{für} \qquad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{bmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{bmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt

$$E = r^2\cos^2(\theta), \quad F \equiv 0, \quad G = r^2.$$

Fortsetzung des Beispiels. Mit

$$E = r^2 \cos^2(\theta), \quad F \equiv 0, \quad G = r^2.$$

folgt aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2)$$

daher

$$do = r^2 \cos(\theta)\, d(\varphi, \theta), \qquad \text{für} \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wir können nun die Oberfläche der Sphäre wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\theta)\, d\varphi\, d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin(\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \;=\; 4\pi r^2. \end{aligned}$$

$\square$

Oberflächenintegrale erster und zweiter Art.

Definition: *Sei* $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ *eine* C^1*-Parametrisierung einer Fläche* $F = \mathbf{p}(K)$, *wobei* $K \subset D$ *kompakt, messbar und zusammenhängend ist.*

- *Für eine stetige Funktion* $f : F \to \mathbb{R}$ *ist das* `Oberflächenintegral 1. Art` *definiert durch*

$$\int_F f(\mathbf{x})\, do := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}$$

- *Für ein stetiges Vektorfeld* $\mathbf{f} : F \to \mathbb{R}^3$ *ist das* `Oberflächenintegral 2. Art` *definiert durch*

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u}$$

□

Alternative Darstellung für Oberflächenintegrale.

Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art:

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned}
\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u} \\
&= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u} \\
&= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \, do.
\end{aligned}$$

Interpretation der Oberflächenintegrale.

Bemerkung:

- Ist $\rho(\mathbf{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Oberflächenintegral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.
- Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Oberflächenintegral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den `Fluss` von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch die Fläche F.
- Ist F eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberfläche eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir

$$\oint_F f(\mathbf{x})\,do \qquad \text{bzw.} \qquad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\,do.$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nach außen weist.

$\square$