Der Integralsatz von Gauß.

Satz (Integralsatz von Gauß)**:** *Sei* $\mathrm{G} \subset \mathbb{R}^3$ *ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h.* G *sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand* $\partial\mathrm{G}$ *bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale* $\mathbf{n}(\mathbf{x})$*. Ist* $\mathbf{f} : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^3$ *ein* C^1*-Vektorfeld mit* $\mathrm{G} \subset \mathrm{D}$*, so gilt*

$$\int_{\mathrm{G}} \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \oint_{\partial \mathrm{G}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{do}.$$

Interpretation des Gaußschen Integralsatzes: Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung, so gilt $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ und daher

$$\oint_{\partial \mathrm{G}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathrm{do} = 0.$$

$\square$

Beispiel.

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und die Kugel

$$K := \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3$$

und damit

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = 3 \cdot \operatorname{vol}(K) = 4\pi.$$

Das entsprechende Oberflächenintegral läßt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. durch die Parametrisierung der Kugel mit Kugelkoordinaten, berechnen. $\square$

Die Formeln von Green.

Satz: (Formeln von Green)**:** *Die Menge* $G \subset \mathbb{R}^3$ *erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für* C^2*-Funktionen* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $G \subset D$, *gelten dann die Relationen:*

$$\begin{aligned} \int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do \\ \int_G (f\Delta g - g\Delta f)\, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) do \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}) \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ *in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors* $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis der Greenschen Formeln.

Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle\end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned}\int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} &= \int_G \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\, do \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle\, do = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do\end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g. ■

Der Integralsatz von Stokes.

Satz (Integralsatz von Stokes)**:** *Sei* $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^3$ *ein* C^1*-Vektorfeld auf einem Gebiet* $D \subset \mathbb{R}^3$*. Weiter sei* $F = \mathbf{p}(K)$ *eine Fläche in* D, $F \subset D$, *mit Parametrisierung* $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, *und* $K \subset \mathbb{R}^2$ *sei ein Greenscher Bereich. Der Rand* ∂K *werde durch eine stückweise glatte* C^1*-Kurve* $\mathbf{c}$ *parametrisiert, deren Bild* $\tilde{\mathbf{c}}(t) := p(\mathbf{c}(t))$ *dann den Rand* ∂F *der Fläche* F *parametrisiert. Die Orientierung der Randkurve* $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ *sei hierbei so gewählt, dass* $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$ *in Richtung der Fläche weist. Dann gilt*

$$\int_F \mathrm{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, do = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Beispiel.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (-y, x, -z)^T$$

und die geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt = 2\pi
\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir definieren nun eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi, \psi)$$

mit $(\varphi, \psi) \in K = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, d.h. F ist die obere Kugelhälfte.

Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, do = \oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 2\pi.$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art**:

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, do = \int_K \left\langle \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi,\psi))), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} \right\rangle d\varphi\, d\psi$$

Beachte: Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man rechnet $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (0,0,2)^T$ direkt nach sowie

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cos^2(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos^2(\psi) \\ \sin(\psi)\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, do = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 2\sin(\psi)\cos(\psi)\, d\varphi\, d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\psi)\, d\psi = 2\pi.$$

$\square$