Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

22. Oktober 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Def. 5.1: Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \text{ heißt Länge von } \mathbf{x},$$

$$d = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \text{ heißt Abstand zwischen } \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{y}.$$

Def. 5.2: Die Menge

$$K_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x}|\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r,\ r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

heißt offene Kugelumgebung des Punktes $\mathbf{x}_0$ mit dem Radius r,

$$\overline{K}_{\mathbf{x}_0,r} := \{\mathbf{x}|\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r,\ r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

entsprechende abgeschlossene Kugelumgebung des Punktes $\mathbf{x}_0$ mit dem Radius r.

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Def. 5.3: $M \subset \mathbb{R}^n$ **heißt offen, wenn zu jedem Element** $\mathbf{x} \in M$ **eine Umgebung** $K_{\mathbf{x},r}$ **gefunden werden kann, die in der Menge** M **liegt, also** $K_{\mathbf{x},r} \subset M$**.**

Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ **heißt innerer Punkt der Menge** M**, wenn eine Umgebung** $K_{x,r}$ **existiert, die ganz in der Menge** M **liegt. Die Menge aller inneren Punkte der Menge** M **bezeichnen wir mit** $\dot{M}$**.**

Def. 5.4: Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ **heißt Häufungspunkt der Menge** $M \subset \mathbb{R}^n$**, wenn in jeder Umgebung des Punktes** $\mathbf{x}_0$**, also in** $K_{\mathbf{x}_0,r}$ **,** $r > 0$ **beliebig, ein Punkt der Menge** M **liegt. Das bedeutet**

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0,r} \neq \emptyset \quad \text{für alle } r > 0.$$

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Def. 5.5: Ein Punkt $\mathbf{x}_r$ heißt Randpunkt der Menge M, falls in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ sowohl mindestens ein Punkt der Menge M liegt als auch ein Punkt des $\mathbb{R}^n$, der nicht in der Menge M liegt. Die Menge aller Randpunkte einer Menge bezeichnet man mit ∂M.

Def. 5.6: Die Menge M heißt abgeschlossen, falls sie alle ihre Randpunkte enthält.

Def. 5.7: Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$|\mathbf{x}| \leq C, \quad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \in M$$

gilt.

Die Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

Def. 5.8: Die Menge

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} \,|\, \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\ \ s \in [0,1]\}$$

heißt Verbindungsstrecke der Punkte x und y.

Mit

$$[\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_p] = \cup_{j=1}^{p} [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$$

bezeichnet man einen Polygonzug, der die Punkte $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_p$ jeweils durch Verbindungsstrecken verbindet.

Eine Menge *M* heißt zusammenhängend, falls zwei beliebige Punkte x und y durch einen ganz in *M* verlaufenden Polygonzug verbunden werden können.

Eine Menge heißt konvex, falls mit x und y aus *M* die Verbindungsstrecke [x, y] ganz in *M* liegt.

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

Buch Kap. 5.1 – Exkurs Punktmengen aus dem $\mathbb{R}^n$

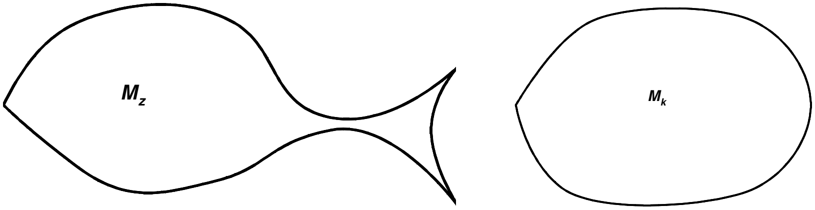

Abbildung 5.4, 5.5: Zusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}^2$, nicht konvex (links), konvex (rechts)

Def. 5.9: Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Zuordnungsvorschrift (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $a_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennen wir Folge im $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen ihn durch

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{bzw.} \quad \text{abkürzend durch} \qquad (a_k)\ .$$

Buch Kap. 5.1 – Grenzwert von Folgen im $\mathbb{R}^n$

Defintion 5.10: Sei (a_k), $k \in \mathbb{N}$, eine Folge im $\mathbb{R}^n$. $a_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert oder Limes von (a_k) falls für jede Zahl $\epsilon > 0$ ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_k - a_0| < \epsilon \qquad \text{für alle} \quad k \geq k_0$$

gilt.

Wir schreiben dafür

$$a_0 = \lim_{k \to \infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \to a_0 \text{ für } k \to \infty.$$

Buch Kap. 5.1 – Grenzwert Koordinatenfolgen

Satz 5.1: Der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$ existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert $\mathbf{a}_0$ der Folge $(\mathbf{a}_k)$ gilt dann

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k\to\infty} a_{1k} \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k\to\infty} a_{nk} \end{pmatrix} .$$

Buch Kap. 5.2 – Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher

Defintion 5.11: Unter einer Abbildung

$$\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ \ D \subset \mathbb{R}^n,\ \ n, m \in \mathbb{N},$$

verstehen wir eine Zuordnungsvorschrift, die jedem x $\in D$ genau ein Element y $\in \mathbb{R}^m$ zuordnet, wobei wir die Schreibweise y $=$ f(x) verwenden.

D **heißt Definitionsbereich der Abbildung f.**

$$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \text{es existiert ein}\ \ \mathbf{x} \in D\ \ \text{mit}\ \ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

heißt Wertebereich der Abbildung f.

Buch Kap. 5.2 – Graph einer Funktion

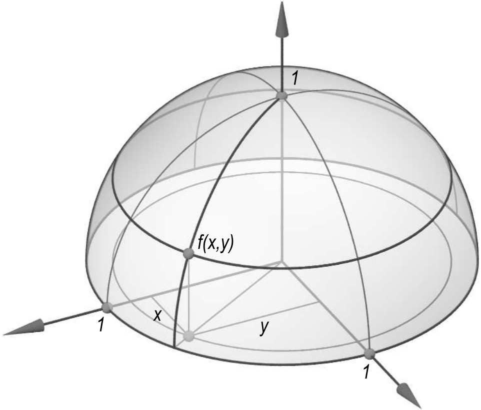

Abbildung 5.8: Graph der Abbildung
$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ D := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Buch Kap. 5.8 – Niveau einer Funktion

Defintion 5.30: Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, gegeben. Unter einem Niveau a der Funktion f verstehen wir alle Punkte $\mathbf{x} \in D$ mit $f(\mathbf{x}) = a =$ const.. Diese Punktmenge bezeichnet man auch als Niveaumenge. Ist diese Menge eine Kurve, so nennt man sie Niveau- oder Höhenlinie.

Buch Kap. 5.8 – Niveau und Graph

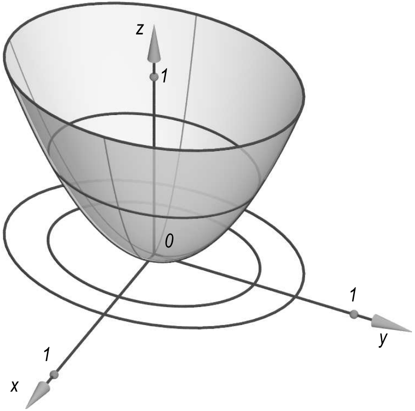

Abbildung 5.19: Graph einer Funktion und Niveaulinien

Buch Kap. 5.4 – Stetigkeit von Abbildungen

Defintion 5.20: (Stetigkeit einer Funktion)
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$.

a) **f heißt stetig in $x_0 \in D$, falls für alle Folgen $(x_k) \subset D$ $(k \in \mathbb{N})$ aus $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ die Beziehung**

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$$

folgt.

b) **f heißt stetig auf $A \subset D$, falls für alle $x \in A$ gilt: f ist stetig in x.**

c) **f heißt stetig, falls f auf dem gesamten Definitionsbereich D stetig ist.**

Buch Kap. 5.4 – Stetigkeit

Defintion 5.21: Sei

$$\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \; D \subset \mathbb{R}^n, \; \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

f heißt stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig, falls f_j stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig ist für alle $j = 1, 2, \ldots, m$.

Buch Kap. 5.4 – Maximum, Minimum

Defintion 5.22: M **heißt Maximum der Funktion** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$**, falls**

$$f(x) \leq M \quad \text{für alle} \quad x \in D$$

gilt und falls es ein $x_M \in D$ **mit** $f(x_M) = M$ **gibt.**

m **heißt Minimum der Funktion** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$**, falls**

$$f(x) \geq m \quad \text{für alle} \quad x \in D$$

gilt und falls es ein $x_m \in D$ **mit** $f(x_m) = m$ **gibt.**

Buch Kap. 5.4 – Stetigkeit von Abbildungen

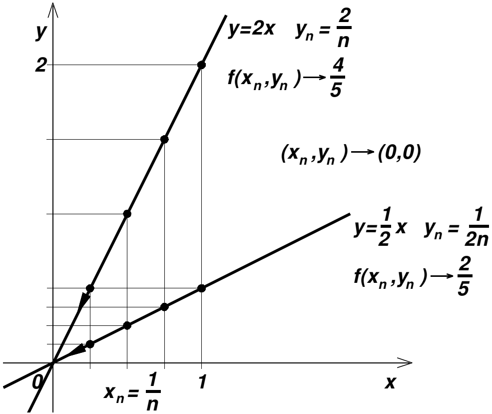

Abbildung 5.15: Unstetigkeitsstelle (0,0) der Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Buch Kap. 5.4 – Max und Min auf kompakten Mengen

Satz 5.2: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, dann nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

Buch Kap. 5.5 – Partielle Ableitung

Defintion 5.23: Sei die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

dann ist die Funktion f an der Stelle x partiell differenzierbar nach x_j

und durch den Grenzwert

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die partielle Ableitung nach x_j von f an der Stelle x definiert.

Buch Kap. 5.5 – Partielle Differenzierbarkeit

Defintion 5.24: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist auf $A \subset D$, A offen, partiell differenzierbar nach x_j, falls f in allen Punkten $\mathrm{x} \in A$ partiell nach x_j differenzierbar ist.

f ist partiell nach x_j differenzierbar, falls f auf D partiell nach x_j differenzierbar ist.

Für die partielle Ableitung nach x_j wird auch die Bezeichnung f_{x_j} verwendet.

f heißt partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen existieren.

Buch Kap. 5.5 – stetige Ppartielle Differenzierbarkeit

Defintion 5.25: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt in D stetig partiell differenzierbar, falls in D alle partiellen Ableitungen existieren und zugleich stetig sind.