Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

Universität Hamburg

19. November 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 5.11 – TAYLOR–Formel in $\mathbb{R}^n$

Satz 5.6: Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)-$mal stetig partiell differenzierbar, und die Verbindung $[\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{h}]$ von a und $\mathrm{a}+\mathrm{h}$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gilt die TAYLOR**-Formel**

$$f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) = f(\mathrm{a}) + \frac{1}{1!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)f(\mathrm{a}) + \frac{1}{2!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^2 f(\mathrm{a}) + \dots \\ \dots + \frac{1}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^p f(\mathrm{a}) + R(\mathrm{a},\mathrm{h})$$

mit dem Restglied

$$R(\mathrm{a},\mathrm{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^{p+1} f(\mathrm{a}+s\mathrm{h})\, ds\,.$$

Es gilt die Abschätzung

$$|R(\mathrm{a},\mathrm{h})| \le \frac{|\mathrm{h}|^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{0\le s\le 1} \sqrt{\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{p+1}=1}^{n} |f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{p+1}}}(\mathrm{a}+s\mathrm{h})|^2}\,.$$

Defintion 5.32: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ sei $(p+1)-$mal stetig partiell differenzierbar, und $[\mathrm{a}, \mathrm{a}+\mathrm{h}]$ sei eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(\mathrm{a}+\mathrm{h}) := f(\mathrm{a}) + \frac{1}{1!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)f(\mathrm{a}) + \ldots + \frac{1}{p!}(\mathrm{h}\cdot\nabla)^p f(\mathrm{a})$$

TAYLOR$-$**Polynom $p-$ten Grades der Funktion $f(\mathrm{x})$ an der Stelle a.**

Buch Kap. 5.11 – Mittelwertsatz

Satz 5.7: Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar, und ist $[\mathrm{a}, \mathrm{a} + \mathrm{h}]$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gibt es eine Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) - f(\mathrm{a}) = h_1 f_{x_1}(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h}) + h_2 f_{x_2}(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h}) + \dots$$
$$\dots + h_n f_{x_n}(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h})$$

gilt. Es gilt die Abschätzung

$$|f(\mathrm{a}+\mathrm{h}) - f(\mathrm{a})| \leq |\mathrm{h}| \sup_{0\leq s\leq 1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(\mathrm{a}+s\mathrm{h})|^2}\ .$$

Buch Kap. 5.11 – Quadratische Approximation

Satz 5.8: Das TAYLOR**-Polynom 2. Grades einer Funktion f an der Stelle $\mathbf{x_0}$ kann man in der Form**

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x_0}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T H_f(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$$

darstellen, wobei H_f die HESSE**−Matrix der Funktion f bezeichnet.**

Buch Kap. 5.13 – notwendige Extremalbedingungen

Satz 5.11: Ist $\mathbf{x_0} \in \dot{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x_0}) = 0,$$

d.h. sämtliche partiellen Ableitungen von f verschwinden. (mit $\dot{D}$ werden die inneren Punkte von D bezeichnet).

Ist f 2 mal stetig partiell differenzierbar, so ist $H_f(x_0)$ negativ semidefinit, falls x_0 lokale Maximalstelle, positiv semidefinit, falls x_0 lokale Minimalstelle.

Buch Kap. 5.13 – hinreichende Extremalbedingungen

Satz 5.12: Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = 0$ ist eine

- **echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,**
- **echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,**

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \neq 0$.

Buch Kap. 5.13 – hinreichende Extremalbedingungen

Satz 5.13: Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt:
Ein Punkt $\mathbf{x_0} \in \dot{D}$ mit $f'(\mathbf{x_0}) = 0$ ist eine

a) **echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der** HESSE–**Matrix $H_f(\mathbf{x_0})$ alle negativ sind,**

b) **echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der** HESSE–**Matrix $H_f(\mathbf{x_0})$ alle positiv sind.**