Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

3. Dezember 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Multiplikatoren

Satz 5.15: Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und die Abbildung $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell differenzierbar auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$, wobei die JACOBI**-Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ den Rang m habe. Dann gilt:**

Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, so existiert eine $(1 \times m)$-Matrix (Zeilenvektor) $\mathbf{L} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L}\,\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = 0\ .$$

Die reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ heißen LAGRANGE**sche Multiplikatoren.**

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Multiplikatoren in 2d

Satz 5.16: Durch $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ werden zwei stetig partiell differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ beschrieben. Dabei sei grad $g(\mathbf{x}) \neq 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$. Ist $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, so gilt

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) = 0$$

mit einer reellen Zahl λ (LAGRANGE−Multiplikator).

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

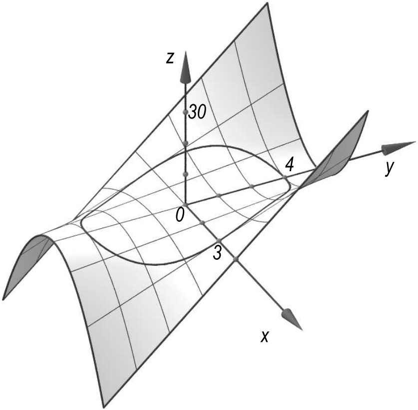

Abbildung 5.24: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ mit Einschränkung des Graphen auf die Nebenbedingungsmenge $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

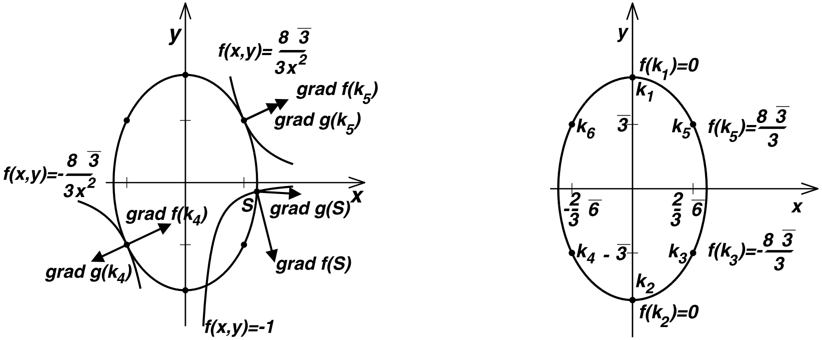

Abbildung 5.25: Gradienten von $f(x,y) = x^2 y$ und $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$ und Extremwerte von $f(x,y)$ in den Punkten $K_1, \ldots, K_6$ auf dem Niveau $g(x,y) = 0$

Buch Kap. 5.14 – Extrema mit Nebenbedingungen

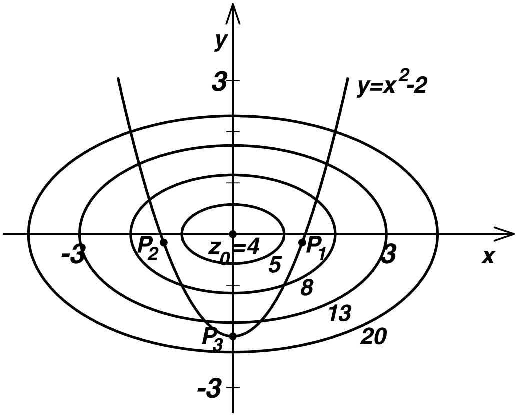

Abbildung 5.26: Extremwerte von $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4$ auf dem Niveau $x^2 - y - 2 = 0$