Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

10. Dezember 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Funktion

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und h $: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ seien stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit rang(h′(x)) $= m$ für jedes x $\in D$.
Die Funktion $L : D \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu) := f(x) - \mu^t h(x)$$

heißt Lagrange Funktion des Minimierungsproblems von f unter $h = 0$.
Ist x Extremalstelle von f unter $h = 0$ und λ der zugehörige Lagrange Parameter, so gilt mit $\mu = -\lambda$

$$\nabla L(x, \mu) = 0.$$

Ist f 2mal stetig diffbar und x lokales Minimum von f unter $h = 0$, so gilt

$$w^t \nabla_{xx} L(x, \mu) w \geq 0 \text{ für alle } w \in \ker Dh(x).$$

Buch Kap. 5.14 – Lagrange Funktion, hinreichende OptBedingungen

$f : D \to \mathbb{R}$ und h : $D \to \mathbb{R}^m$ seien 2mal stetig partiell diffbar auf $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > m$ mit rang(h′(x)) $= m$ für jedes x $\in D$.

Es gelte

$$\nabla L(x, \mu) = 0$$

und

$$w^t \nabla_{xx} L(x, \mu) w > (<) 0 \text{ für alle } w \in \ker Dh(x).$$

Dann ist x striktes lokales Minimum (Maximum) von f unter $h = 0$.

Buch Kap. 5.16 – NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

Betrachte zu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x) = 0.$$

Das numerische Lösungsverfahren der Wahl für solche Gleichungen ist das Newton Verfahren

1) **Wähle Startwert $x^0 \in \dot{D}$, setze $k = 0$.**
2) **Ist $f(x^k) = 0$, STOP (mit $x = x^k$ gilt $f(x) = 0$).**
3) **Berechne x^{k+1} aus x^k gemäß**

$$f'(x^k)\delta x = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \delta x$$

4) **k = k+1, gehe zu 2).**

Auf dem Rechner: $f(x^k) = 0$ ist zu ersetzen durch ein geeignetes Abbruchkriterium.

Buch Kap. 5.16 – NEWTON-Verfahren, Konvergenz

Satz 5.18: **f** $: D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n$**, sei zweimal stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle** $\overline{\mathbf{x}} \in \dot{D}$**. Weiterhin sei** $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ **für jedes** $\mathbf{x} \in D$ **regulär. Es gibt eine Umgebung** U **von** $\overline{\mathbf{x}}$**, so dass die** NEWTON**-Folge** $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ **von einem beliebigen** $\mathbf{x}^0 \in U$ **ausgehend gegen die Nullstelle** $\overline{\mathbf{x}}$ **von** f **konvergiert.**

Die Konvergenz ist quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$**, so dass für alle** $k = 1,2,3,\ldots$

$$|\mathbf{x}^k - \overline{\mathbf{x}}| \leq C|\mathbf{x}^{k-1} - \overline{\mathbf{x}}|^2$$

gilt.