Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

17. Dezember 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 7.1 – Operatoren der Vektoranalysis

Defintion 7.1-7.4: Sei $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld.

- **Gradient**

$$\text{grad}: \phi \mapsto \text{grad}\, \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **Divergenz**

$$\text{div}: v \mapsto \text{div v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

- **Laplace Operator**

$$\phi \mapsto \Delta\, \phi := \text{div grad}\, \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

- **Rotation ($n = 3$)**

$$v \mapsto \text{rot v} \equiv \nabla \times v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Buch Kap. 7.1 – Operatoren der Vektoranalysis

Anwendung von grad , Δ auf Vektorfelder

Sei v ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und w ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld.

$$\Delta\, \mathbf{w} := \begin{pmatrix} \Delta\, w_1 \\ \Delta\, w_2 \\ \vdots \\ \Delta\, w_n \end{pmatrix}, \text{ und } (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v} := \begin{pmatrix} (\mathbf{w}\cdot\nabla)\, v_1 \\ (\mathbf{w}\cdot\nabla)\, v_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{w}\cdot\nabla)\, v_n \end{pmatrix}.$$

also Δ w als die komponentenweise Anwendung von Δ.

Buch Kap. 7.1 – Operatoren der Vektoranalysis

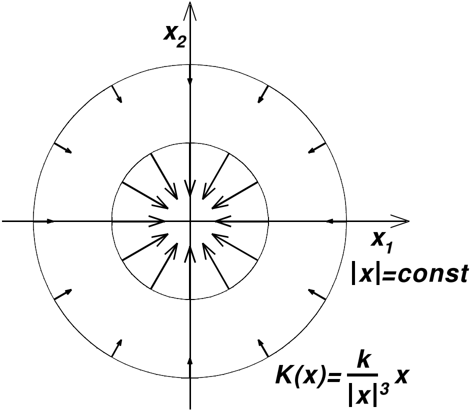


Abbildung 7.1: Zentralkraftfeld K(x) $:= \frac{k}{|x|^3}x$ für $k < 0$ in der Ebene $x_3 = 0$.

Buch Kap. 7.2 – Rechenregeln für Operatoren der Vektoranalysis

Sei $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld und v : $D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so gelten die Regeln

(i) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi) = 0$ (Satz von Schwarz)

(ii) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = 0$

(iii) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\phi) = \Delta\,\phi$

(iv) $\mathrm{div}\,(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\,\phi \cdot \mathbf{v} + \phi\,\mathrm{div}\ \mathbf{v}$

(v) $\mathrm{rot}\,(\phi\mathbf{v}) = \mathrm{grad}\,\phi \times \mathbf{v} + \phi(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})$

(vi) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,(\mathbf{v})) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,(\mathbf{v})) - \Delta\,\mathbf{v}$.

Die Regeln, in denen der Rotationsoperator vorkommt, gelten für $n = 3$.

Buch Kap. 7.3 – Potential und Potentialfeld

Defintion 7.6: (Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld) Sei v ein Vektorfeld.

Ein differenzierbares Skalarfeld ϕ, das die Gleichung

$$\mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{v}$$

erfüllt, nennt man ein Potential oder eine Stammfunktion von v.

Falls es zu einem Vektorfeld v ein Potential ϕ gibt, nennt man v Potentialfeld oder Gradientenfeld (auch der Begriff konservatives Feld wird verwendet).

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

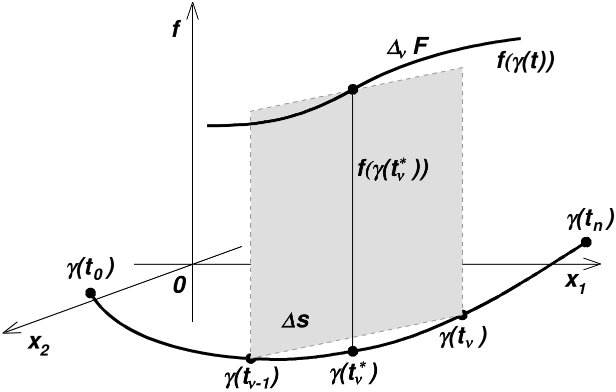


Abbildung 7.3: Zur Definition des skalaren Kurvenintegrals für $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Defintion 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f\, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f (bzw. Kurvenintegral erster Art).

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$**

2) **Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$ der Belegungsfunktion**

3) **Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$**

4) **Berechnung des Kurvenintegrals**

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Buch Kap. 7.5 – Vektorielles Kurvenintegral

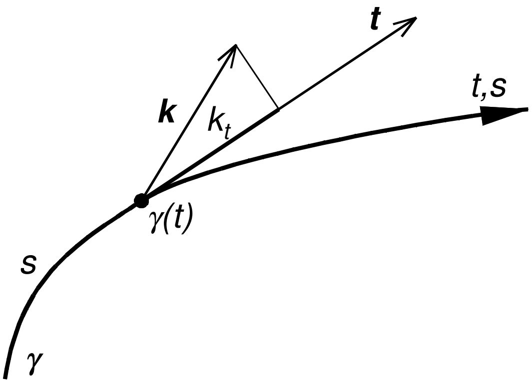


Abbildung 7.4: Kraftvektor k und Tangentialkomponente k_t, Kurventangentenvektor t. Der für die Arbeit entlang der Kurve relevante Kraftanteil wird durch k_t beschrieben.

Buch Kap. 7.5 – Arbeitsintegral

Defintion 7.8: (Arbeitsintegral) Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ Kurve und $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt$$

Integral des Vektorfeldes (vektorielles Kurvenintegral bzw. Arbeitsintegral) entlang γ. Dabei bezeichnet $\mathbf{ds} = \dot{\gamma}(t)\, dt$ das vektorielle Bogenelement.

Besteht die Kurve γ aus den m Kurvenstücken $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, so setzen wir

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} := \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Wenn γ eine geschlossene Kurve ist, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$ gilt, schreiben wir

$$\oint_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} \equiv \int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds}.$$

Buch Kap. 7.5 – Rechenregeln Arbeitsintegral

Satz 7.2: (Rechenregeln für Kurvenintegrale 2. Art) Sei γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$, seien $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{ds} = \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds} + \int_\gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{ds}$

(ii) $\int_\gamma \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = \alpha \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$

(iii) **Ist γ^* die Kurve, die aus γ durch Umkehrung des Durchlaufsinns entsteht, d.h.,**
$\gamma^*(t) := \gamma(t_a + t_e - t),\ t \in [t_a, t_e]$, so folgt

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = - \int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} \; .$$

Buch Kap. 7.5 – Berechnung des Arbeitsintegrals

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve** $\gamma : [t_a, t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

2) **Berechnung der Werte** $\mathbf{k}(\gamma(t))$ **in den Kurvenpunkten**

3) **Berechnung des Tangentenvektors** $\dot{\gamma}(t)$

4) **Berechnung des Kurvenintegrals**

$$\int_\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{ds} = \int_{t_a}^{t_e} (\mathbf{k}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\, dt \ .$$

Buch Kap. 7.6 – Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Satz 7.3: (erster Hauptsatz für Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld mit der Stammfunktion f.

Dann gilt für jede in D verlaufende Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = f(\gamma(t_e)) - f(\gamma(t_a))$$

Buch Kap. 7.6 – Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Satz 7.4: (Kurvenintegrale und Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\gamma : [t_a, t_e] \to D$ eine Kurve in D und v : $D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) **Für alle Kurven γ hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Eigenschaft heißt Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals.**

2) **Für alle geschlossenen Kurven γ, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$, gilt $\oint_\gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = 0$.**

3) **v ist ein Potentialfeld.**

Buch Kap. 7.6 – Doppelpunktfreie Kurven

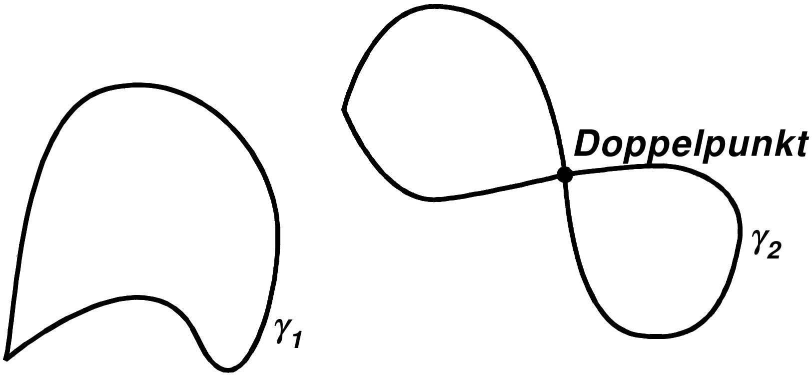


Abbildung 7.5: Doppelpunktfreie Kurve γ_1 und Kurve mit Doppelpunkt γ_2

Buch Kap. 7.6 – Doppelpunktfreiheit

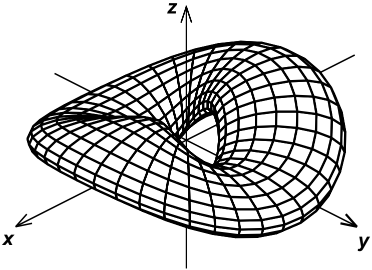
Defintion 7.9: (Doppelpunktfreiheit) Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, falls

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in (t_a, t_e)$$

und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in (t_a, t_e)$ gilt.

Buch Kap. 7.6 – einfach zusammenhängend

Defintion 7.10: (einfach zusammenhängendes Gebiet) Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $\mathbf{x} \in D$ zusammengezogen werden kann.



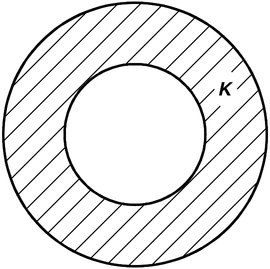


Abbildung 7.6 (links): Torus als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, Abbildung 7.7 (rechts): Kreisring als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$.

Buch Kap. 7.6 – Existenz eines Potentials

Satz 7.5: (Kriterium für die Existenz eines Potentials, zweiter Hauptsatz für Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

v ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die JACOBI**−Matrix $J_\mathbf{v}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist, also**

$$J_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = J_\mathbf{v}(\mathbf{x})^T$$

gilt.

Die Forderung nach der Symmetrie der JACOBI**−Matrix nennt man auch Integrabilitätsbedingung.**

Für den Fall $n = 3$ ist die Symmetrie der JACOBI**−Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung**

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Buch Kap. 7.6 – einfach zusammenhängendes Gebiet

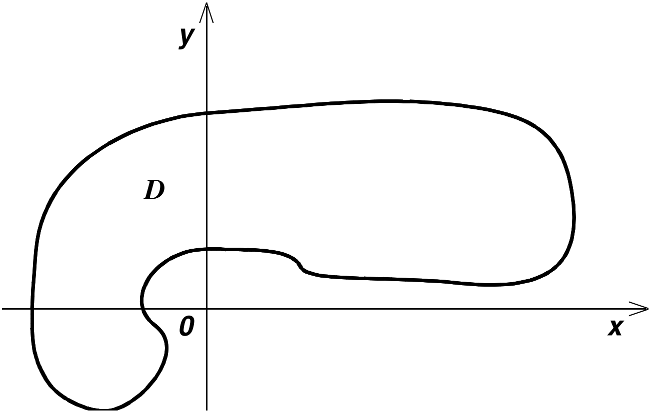


Abbildung 7.8: Einfach zusammenhängendes Gebiet *D* mit (0,0) $\notin$ *D*.

Buch Kap. 7.6 – Kurvenintegral Methode

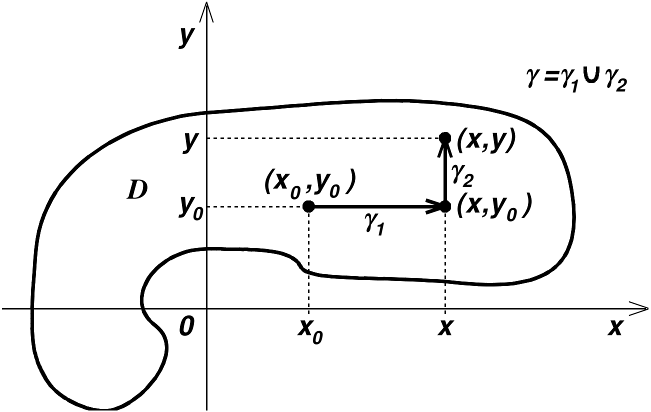


Abbildung 7.9: Zur Methode mit dem Kurvenintegral.

Buch Kap. 7.8 – Vektorpotentiale

Defintion 7.11: (Vektorpotential) Sei $\mathbf{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$, gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w} ,$$

so heißt w Vektorpotential von v.

Buch Kap. 7.8 – Vektorpotentiale

Satz 7.6: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials)
Sei v : $D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, ein differenzierbares Vektorfeld. Ist *D* eine offene konvexe Menge, dann ist die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials w mit v $=$ rot w.

Statt der Forderung der Konvexität von *D* reicht hier auch die schwächere Forderung, dass *D* einfach zusammenhängend ist.