Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

7. Januar 2009

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\rightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 7.6 – Doppelpunktfreie Kurven

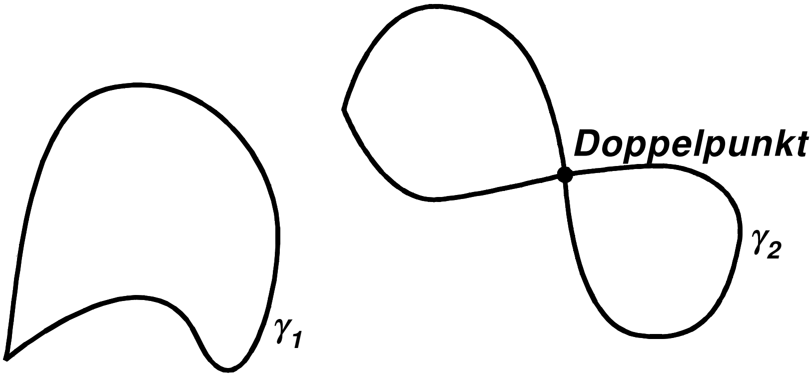


Abbildung 7.5: Doppelpunktfreie Kurve γ_1 und Kurve mit Doppelpunkt γ_2

Buch Kap. 7.6 – Doppelpunktfreiheit

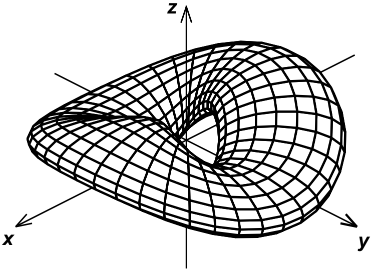
Defintion 7.9: (Doppelpunktfreiheit) Eine Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt doppelpunktfrei, falls

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad \text{für} \quad t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in (t_a, t_e)$$

und $\gamma(t_a) \neq \gamma(t)$ für $t \in (t_a, t_e)$ gilt.

Buch Kap. 7.6 – einfach zusammenhängend

Defintion 7.10: (einfach zusammenhängendes Gebiet) Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend oder kontrahierbar, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt $x \in D$ zusammengezogen werden kann.



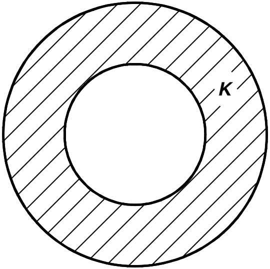


Abbildung 7.6 (links): Torus als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, Abbildung 7.7 (rechts): Kreisring als nicht einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$.

Buch Kap. 7.6 – Existenz eines Potentials

Satz 7.5: (Kriterium für die Existenz eines Potentials, zweiter Hauptsatz für Potentialfelder) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

v ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die JACOBI**−Matrix $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist, also**

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})^T$$

gilt.

Die Forderung nach der Symmetrie der JACOBI**−Matrix nennt man auch Integrabilitätsbedingung.**

Für den Fall $n = 3$ ist die Symmetrie der JACOBI**−Matrix gleichbedeutend mit der Gleichung**

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0.$$

Buch Kap. 7.6 – einfach zusammenhängendes Gebiet

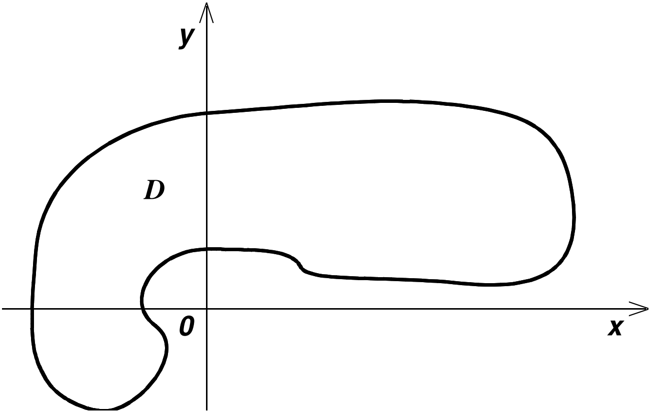


Abbildung 7.8: Einfach zusammenhängendes Gebiet *D* mit (0,0) $\notin$ *D*.

Buch Kap. 7.6 – Kurvenintegral Methode

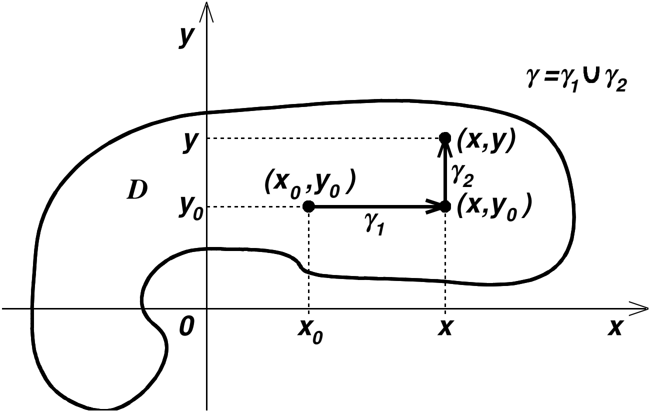


Abbildung 7.9: Zur Methode mit dem Kurvenintegral.

Buch Kap. 7.8 – Vektorpotentiale

Defintion 7.11: (Vektorpotential) Sei $\mathbf{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ D \subset \mathbb{R}^3$, gegeben. Existiert ein differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w} \ ,$$

so heißt w Vektorpotential von v.

Buch Kap. 7.8 – Vektorpotentiale

Satz 7.6: (Kriterium für die Existenz eines Vektorpotentials)
Sei v : $D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, ein differenzierbares Vektorfeld.
Ist D eine offene konvexe Menge, dann ist die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines Vektorpotentials w mit $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$.

Statt der Forderung der Konvexität von D reicht hier auch die schwächere Forderung, dass D einfach zusammenhängend ist.

Buch Kap. 8.1 – Flächeninhalt ebener Bereiche

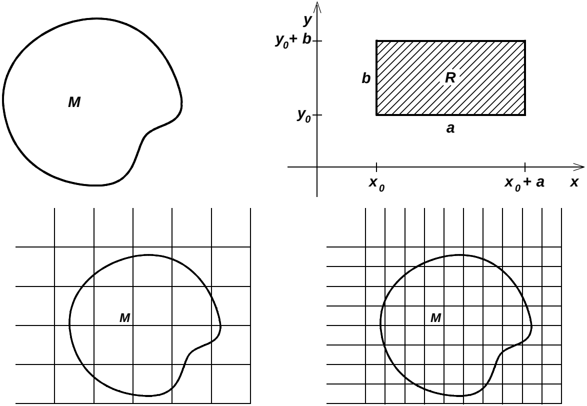


Abbildung 8.1-8.4: Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ (ol), Rechteck (or), Gitter mit Maschenweite h (ul), mit Maschenweite $h/2$ (ur).

Buch Kap. 8.1 – Volumen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Punktmenge und G_h Gitter über M mit Maschenweite $h > 0$. $s_h(M)$ bezeichne Fläche aller vollständig in M enthaltenen Maschen, $S_h(M)$ die Fläche aller Maschen, die wenigstens einen Punkt aus M enthalten. Mit

$$F_i(M) := \lim_{h \to 0} s_h(M) \text{ und } F_o(M) := \lim_{h \to 0} S_h(M)$$

heißt
Definition 8.1: die Menge M Jordan-messbar gdw

$$F_i(M) = F_o(M)$$

gilt.
In diesem Fall wird das Volumen der Menge M durch

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M)$$

erklärt, wobei $F(\emptyset) := 0$. Eine Jordan-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ wird eine Jordan-Nullmenge genannt.

Buch Kap. 8.1 – reguläre Bereiche

Definition 8.2: Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Bereich, falls

a) **B abgeschlossen ist,**

b) **das Innere von B, also $B \setminus \partial B$, ein Gebiet ist und**

c) **der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären $n-1$-dimensionalen Hyperflächen besteht (die etwa als Graphen von glatten Funktionen darstellbar sind).**

Buch Kap. 8.2 – Durchmesser einer Menge

Definition 8.3: Unter dem Durchmesser einer Punktmenge *C* wollen wir

$$\mathrm{diam}(C) := \sup\{|x - y| \mid x, y \in C\}$$

verstehen.

Buch Kap. 8.2 – Zerlegungen

Definition 8.4: Unter einer Zerlegung Z von B verstehen wir eine Familie

$$\{B_j | j = 1, ..., n\}$$

von regulären Teilbereichen mit den Eigenschaften

a) $\cup_{j=1}^{n} B_j = B$,
b) **für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge,**

wobei wir unter einer Familie eine Menge von Mengen verstehen wollen.
Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\mathrm{diam}(B_j) | j = 1, ..., n\}$$

definiert. Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, falls

$$\lim_{k\to\infty} \delta(Z_k) = 0$$

gilt.

Buch Kap. 8.2 – Zerlegung

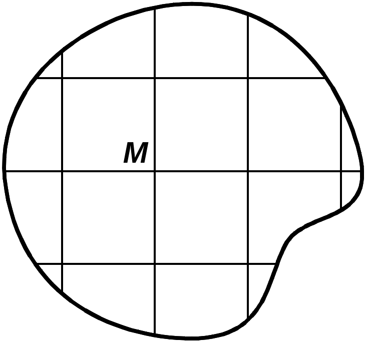


Abbildung 8.5: Zerlegung von $M \subset \mathbb{R}^2$

Buch Kap. 8.2 – Riemann'sche Zwischensumme

Definition 8.5: Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $Z = \{B_j | j = 1, ..., n\}$ eine Zerlegung von B und sind $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (sogenannte Zwischenpunkte), so heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j) F(B_j)$$

RIEMANN**sche Zwischensumme der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$.**

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Satz 8.2: Ist f beschränkt und in B (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so

- **konvergiert die Folge der** RIEMANN**schen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede Folge zulässiger Zerlegungen (Z_k), und**

- **der Grenzwert I ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.**

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Definition 8.6: Unter den Voraussetzungen an *f* aus Satz 8.2 nennt man *I* das RIEMANN**sche Flächenintegral der Funktion *f* über den Bereich *B*, und man verwendet die Schreibweisen**

$$\int_B f\,dF = \int_B f(x)\,dF = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx_1 \ldots dx_n := I,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$.