Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

4. Februar 2009

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

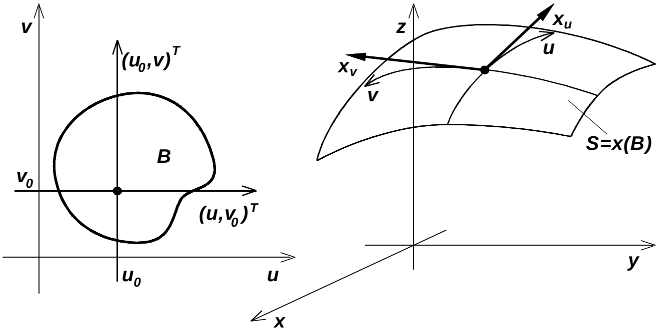

Abbildung 8.20: Reguläres Flächenstück $S = \mathbf{x}(B)$

Buch Kap. 8.6 – Parametrisierung von Flächenstücken

Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich. Sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Einschränkung von $\mathbf{x}$ auf B wird Parametrisierung eines reguären Flächenstücks genannt, falls

1) **$\mathbf{x}$ injektiv ist, und**
2) **für alle $(u, v)^T \in B$**

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Die Punktmenge

$$S := \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v)^T \in B\} =: \mathbf{x}(B)$$

ist dann das von der Parameterdarstellung $\mathbf{x}$ dargestellte Flächenstück und wird reguläres Flächenstück genannt.

Buch Kap. 8.6 – stückweise reguläre Fläche

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn es endlich viele reguläre Flächenstücke $S_1, \ldots, S_p$ gibt, die höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam besitzen und für die

$$S = \cup_{j=1}^{p} S_j$$

gilt.

Buch Kap. 8.6 – Flächeninhalt eines Flächenstücks

Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks S, das durch die Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3,\ S = \mathbf{x}(B)$ gegeben ist, wird durch

$$O(S) = \int_B |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF = \\ = \int_B \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\, dF$$

definiert.

Dabei bezeichnen E, F und G die metrischen Fundamentalgrößen der Fläche;

- $E := |x_u|^2$,
- $F := x_u \cdot x_v$ **und**
- $G := |x_v|^2$.

Buch Kap. 8.6 – Integration über Oberflächen

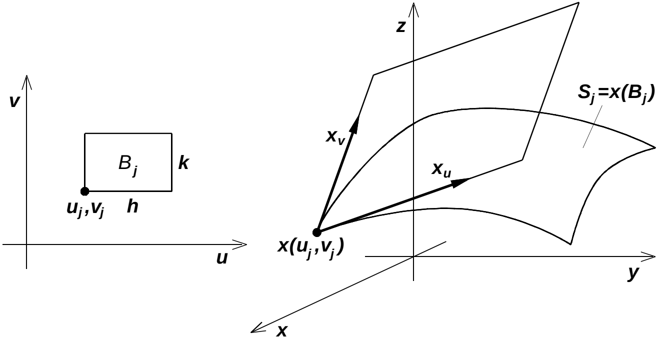

Abbildung 8.23:Übergang von B_j mittels x zu S_j

Buch Kap. 8.6 – Integration über Oberflächen

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \longrightarrow S,\ \mathbf{x}(B) = S$. Wenn $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bschränkte Funktion ist und das Riemann Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF$$

existiert, so heißt

$$\int_S f\, dO := \int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF$$

Oberflächenintegral der Funktion f über das reguläre Flächenstück S.

Buch Kap. 8.6 – Stückweise Integration über Oberflächen

Ist $S = \cup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ für $i \neq j$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, so definiert man für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral $\int_S f\, dO$ durch

$$\int_S f\, dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\, dO.$$

Ist $f : S \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig (bis auf eine Nullmenge), so existiert

$$\int_S f\, dO.$$

Buch Kap. 8.6 – Berechnung des Oberflächenintegrals

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Fläche S durch $x : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $x(B) = S$**

2) **Berechnung der Funktionswerte der Belegungsfunktion $f(x(u, v))$**

3) **Berechnung des Oberflächenelements**

$$dO = |x_u(u, v) \times x_v(u, v)|dudv$$

auf der Basis der Tangentenvektoren $x_u(u, v)$ und $x_v(u, v)$

4) **Berechnung des Oberflächenintegrals**

$$\int_S f\, dO = \int_B f((x(u, v))|x_u(u, v) \times x_v(u, v)|dudv$$

Buch Kap. 8.6 – Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Seien f und g stetige Funktionen auf der regulären Fläche S und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $\int_S (f+g)\,dO = \int_S f\,dO + \int_S g\,dO$ **(Additivität),**

(ii) $\int_S \alpha f\,dO = \alpha \int_S f\,dO$ **(Homogenität),**

(iii) **aus $f \leq g$ folgt $\int_S f\,dO \leq \int_S g\,dO$ (Monotonie),**

(iv) **(Bereichsadditivität) S_1 und S_2 Flächen mit $S_1 \cap S_2 =$ endlich viele reguläre Kurvenstücke. Dann**

$$\int_{S_1} f\,dO + \int_{S_2} f\,dO = \int_{S_1 \cup S_2} f\,dO\,,$$

(v) **(Mittelwertsatz) S stückweise reguläre Fläche, $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_0 \in S$ mit $\int_S f\,dO = f(x_0)\,O(S)$.**

Buch Kap. 8.6 – Flüsse

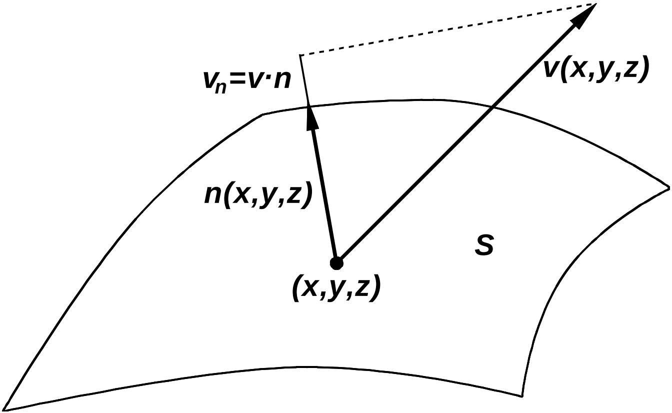

Abbildung 8.25: Normalenvektor und Normalkomponente eines Vektorfeldes auf einem Flächenelement

Buch Kap. 8.6 – Fluss eines VF durch Flächen, Def 8.14

Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung x und v : $S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann wird durch

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} := \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dO$$

das Oberflächenintegral des Vektorfeldes v durch S bzw. der Fluss von v durch S definiert.

Buch Kap. 8.6 – Berechnung des Flusses

1) **Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$**

2) **Berechnung der Werte des VF $\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v))$ auf S**

3) **Berechne vektorielles Oberflächenelement**

$$\mathbf{dO} = (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

4) **Berechnung des Flussintegrals**

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

Buch Kap. 8.6 – Zirkulation, Def 8.15

Es sei $\mathbf{v} : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M.

Das Kurvenintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

nennt man die Zirkulation von v längs der Kurve k.

Zirkulation ist also das Arbeitsintegral über v entlang geschlossener Kurven.

Buch Kap. 8.4 – Satz 8.7 von GREEN

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen positiv orientierten Kurven besteht (d.h. Bereich liegt beim Durchlauf der Kurve auf der linken Seite), und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \underbrace{\left[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}\right]}_{=\mathrm{rot}\ \mathbf{v}} \, dF \, .$$

Buch Kap. 8.6 – Wirbelstärke, Def 8.16

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und $\mathbf{x_0} \in M$. Der Grenzwert

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x_0}) := \lim_{|A| \to 0, \mathbf{x_0} \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

heißt die Wirbelstärke von v bezüglich der Einheitsrichtung n in $\mathbf{x_0}$. Dabei werden mit $A \subset M$ ebene, einfach zusammenhängende und stückweise glatt berandete Flächenstücke bezeichnet, die die gleiche Einheitsnormale n haben. $|A| = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in A}\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}$.

Es gilt Satz 8.12 (Beweis mit Satz 8.7 von Green :

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x_0}) = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x_0}).$$

Man nennt rot v das zu v gehörende Wirbelfeld.

Buch Kap. 8.6 – Wirbelstärke und Zirkulation

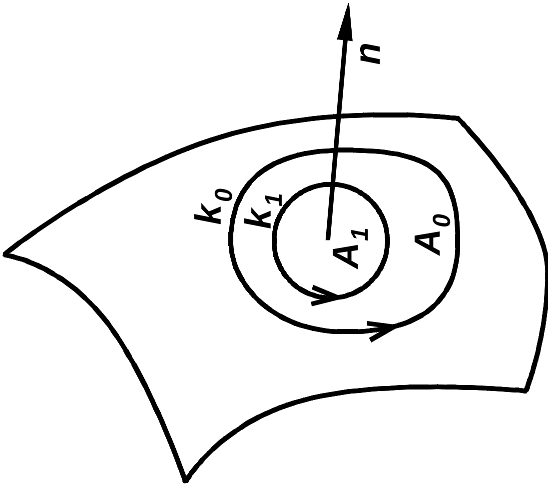

Abbildung 8.29: Von der Zirkulation zur Wirbelstärke

Buch Kapitel 8 – Zirkulation auf Flächen

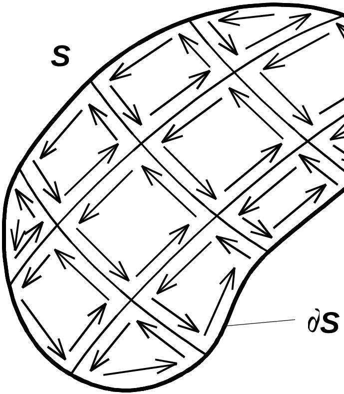

Abbildung 8.31: Zirkulation um *S* und Wirbelstärke auf *S*
Es gilt

$$\oint_{\partial S} v \cdot dx = \sum_{j=1}^{p} \oint_{\partial S_j} v \cdot dx$$

Buch Kap. 8.7 – Satz 8.13 von STOKES in $\mathbb{R}^3$

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und S ein reguläres Flächenstück in M, welches von einer regulären, orientierten Kurve ∂S berandet sei. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} \equiv \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot n dO.$$

Dabei bildet n zusammen mit der Tangente und der Normalen an ∂S ein Rechtssystem (positiv orientiertes Dreibein).

Buch Kap. 8.11 – Illustration zum Satz von GAUSS

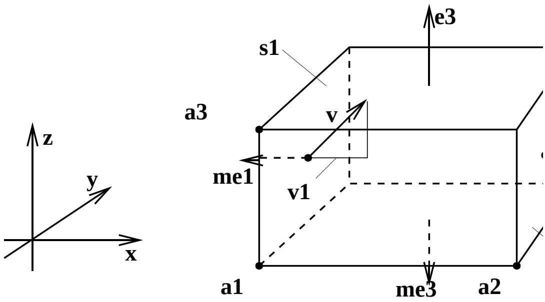

Abbildung 8.31: Fluss des Vektors v durch die Begrenzungsflächen S_1, S_2 des Quaders Q

Buch Kap. 8.11 – Illustration zum Satz von GAUSS

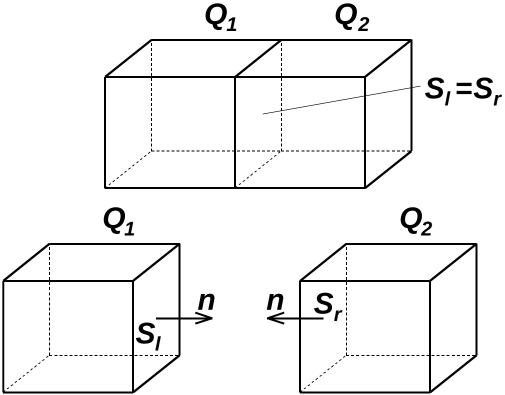

Abbildung 8.32: $Q = Q_1 \cup Q_2$**, Flüsse über** S_l **und** S_r **heben sich auf.**

Buch Kap. 8.11 – Satz 8.20 von GAUSS

Sei B ein regulärer Bereich, die Normale n weise in den Randpunkten von B aus B heraus (man spricht hier auch von der äußeren Normalen). Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, dO \,.$$

Buch Kap. 8.11 – Greensche Formeln

Erste Greensche Formel

$$\int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dO = \int_B [\varphi \, \Delta \, f + \mathrm{grad} \, \varphi \cdot \mathrm{grad} \, f] dV.$$

2te Greensche Formel

$$\int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \, dO = \int_B [\varphi \, \Delta \, f - f \, \Delta \, \varphi] dV.$$