Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1

Aufgabe 1: Geben Sie an, welche der folgenden Mengen offen bzw. beschränkt bzw. abgeschlossen sind.

a) $M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 \geq z \right\}$,

b) $M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$,

c) $M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$,

d) $M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R}, \ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$,

e) $M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) \cdot (1, 2, 3)^T < 6 \right\}$.

Aufgabe 2: Veranschaulichen Sie sich für $k = 1, 2, 3, 4$ die folgenden Abbildungen f_k : $[-1, 1]$ x $[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ indem Sie Skizzen der Flächen $(x, y, f_k(x, y))$ erstellen und jeweils einige Höhenlinien

$f_k^{-1}(C) := \{(x, y)^{\mathrm{T}} : \ f(x, y) = C\}$

von f_k für verschiedene Werte von C skizzieren.
Benutzen Sie ggf. entsprechende Programme z.B. die MATLAB–Funktionen *meshgrid, mesh, surf* und *contour* bzw. deren ez-Versionen.

a) $f_1(x, y) = x - 2\,y$,

b) $f_2(x, y) = x\,y$,

c) $f_3(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ (x, y) \neq (0, 0)$,

d) $f_4(x, y) = \cos(2\pi y)\,\sin(\pi x)$.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie zu den Funktionen aus Aufgabe 2) die Gradientenfelder analytisch. Skizzieren Sie die Gradientenfelder (z.B. mit Hilfe der MATLAB-Funktionen *meshgrid, contour, gradient* und *quiver*). Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Aufgabe 4:

Für zwei parallel geschaltete Ohmsche Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen ein Gesamtwiderstand R mit $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

a) Veranschaulichen Sie sich die hierdurch gegebene Funktion $R = f(R_1, R_2)$ durch Skizzierung einiger Höhenlinien (etwa für $R = 1,\ 1/2,\ 1/4, \ldots$).

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung und den Gradienten $\nabla f(R_1, R_2)$.

c) Zeigen Sie, dass der Gradient ∇f im Punkt $(2, 2/3)$ senkrecht steht auf der Höhenlinie durch diesen Punkt.

Abgabetermine: 27.–31.10.08 (zu Beginn der jeweiligen Übung)