Aufgabe 1:

a) Bestimmen und klassifizieren Sie das lokale Extremum der Funktion

$$f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c\,,$$

mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \qquad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\,, \qquad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad c = 2009\,.$$

b) Gegeben sei die Minimierungsaufgabe $\quad f(x,y,z) := 2x + y + z = \min!$
unter den Nebenbedingungen

$$g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$
$$h(x,y,z) := x^2 + (y - z)^2 = 1.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,2)^T$ zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

(ii) Zeigen Sie, dass im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,2)^T$ ein lokales Maximum der Funktion f unter den gegebenen Nebenbedingungen vorliegt. Überprüfen Sie dazu auch die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Aufgabe 2)

a) Durch

$$F(x,y) = y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2 = 0$$

ist in der Umgebung von $P_0 = (-1,1)$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$F(x,y) = 0 \Longrightarrow y = g(x), \quad g(-1) = 1\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $g(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.

b) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\boldsymbol{c}$

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{y}{z} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}\,, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\boldsymbol{c}$ von $\boldsymbol{c}(1)$ nach $\boldsymbol{c}(3)$ zu bewegen.

c) Berechnen Sie mittels Integration das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 2,\ 0 \le z \le x^2 + y^2 \right\}.$$