Department Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze

SoSe 2009

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Analysis III)

26. August 2009

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang: AIW | BU | ET | GES | IIW | IT | MB | SB | BVT | EUT | VT

Wertung nach DPO : zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$$\sum =$$

Aufgabe 1:

a) Bestimmen und klassifizieren Sie das lokale Extremum der Funktion

$$f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c\,,$$

mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 2009\,.$$

b) Gegeben sei die Minimierungsaufgabe

$$f(x,y,z) := 2x + y + z = \min!$$

unter den Nebenbedingungen

$$g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

$$h(x,y,z) := x^2 + (y - z)^2 = 1.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,2)^T$ zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

(ii) Zeigen Sie, dass im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,2)^T$ ein lokales Maximum der Funktion f unter den gegebenen Nebenbedingungen vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Lösungsskizze:

a)

$$(x,y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + x + c\,. \quad \text{[1 Punkt]}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= -2x + 4y = 0 \iff x = 2y. \\ f_x(x,y) &= 4x - 2y + 1 = 8y - 2y + 1 = 0 \\ &\iff y = -\frac{1}{6} \implies x = -\frac{1}{3}. \quad \text{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Die Hessematrix $H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ist positiv definit. Begründung:
Gerschgorin oder
$H_{11} > 0$ und $\det(H) > 0$ oder
$(4-\lambda)^2 - 4 = 0 \iff \lambda = 4 \pm 2 > 0$
Also liegt ein Minimum vor. [2 Punkte]

b) (i) Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} 2 + \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 2x &= 0 \\ 1 + \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 2(y-z) &= 0 \\ 1 + \lambda \cdot 2z + \mu \cdot (-2(y-z)) &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ x^2 + (y - z)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Für $x_0 = (1,2,2)^T$ lautet das System

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda + 2\mu &= 0 \\ 1 + 4\lambda \cdot + \mu \cdot 0 &= 0 \\ 1 + 4\lambda \cdot + \mu \cdot 0 &= 0 \\ 1 + 4 + 4 &= 9 \\ 1 + (0)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Das System ist für $\lambda = -\frac{1}{4}$ und $\mu = -\frac{3}{4}$ erfüllt. **[3 Punkte]**

(ii) Die zu untersuchende Hessematrix ist

$$H(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 2(\lambda+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda+\mu) & -2\mu \\ 0 & -2\mu & 2(\lambda+\mu) \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $x_0 = (1,2,2)^T$ zusammen mit den Multiplikatoren $\lambda = -\frac{1}{4}$ und $\mu = -\frac{3}{4}$, also

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz von Gerschgorin (bekannt aus Lineare Algebra) folgt, dass kein Eigenwerte von H größer als $-2 + \frac{3}{2}$ sein kann.

Alternativ : $\tilde{\lambda}_1 = -2$ (direkt auf der Diagonalen ablesbar),

$$(-2 - \tilde{\lambda})^2 - (\frac{3}{2})^2 = 0 \Longrightarrow \tilde{\lambda}_{2,3} = -2 \pm \frac{3}{2}.$$

Alle Eigenwerte sind negativ. Es handelt sich also um ein lokales Maximum. **[2 Punkte]**

Aufgabe 2)

a) Durch

$$F(x,y) \;=\; y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2 \;=\; 0$$

ist in der Umgebung von $P_0. = (-1,1)$ implizit eine Funktion $y(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$F(x,y) \;=\; 0 \Longrightarrow y = g(x), \quad g(-1) = 1\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $g(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.

b) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\boldsymbol{c}$

$$\mathbf{K}(x,y,z) \;:=\; \begin{pmatrix} \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) \;:=\; \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\boldsymbol{c}$ von $\boldsymbol{c}(1)$ nach $\boldsymbol{c}(3)$ zu bewegen.

c) Berechnen Sie mittels Integration das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2 \le 2,\;\; 0 \le z \le x^2+y^2 \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 2)

a) **[3 Punkte]** $\quad F(x,y) \;=\; y^2\cdot x - y\cdot\exp(x+y) + 2 \;=\; 0$ Nach denm Satz über implizite Funktionen gilt

$$g'(x) = -F_x/F_y = \frac{y^2 - y\exp(x+y)}{2xy - \exp(x+y) - y\exp(x+y)} \Longrightarrow$$

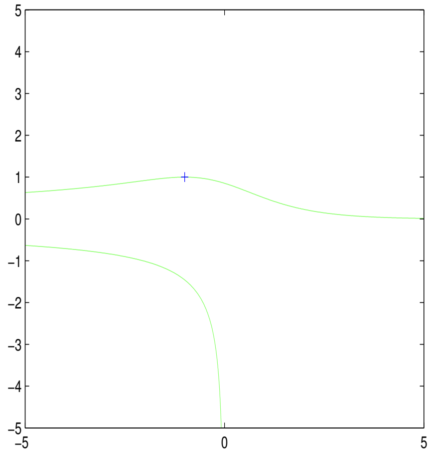
$$g'(-1) = \frac{1 - 1\exp(0)}{-2-1-1\exp(0)} = 0$$

Alternativ: implizites Differenzieren

$$\frac{d}{dx}F(x,y) \;=\; 2yy'\cdot x + y^2 - y'\cdot\exp(x+y) - y\cdot\exp(x+y)\cdot(1+y') \;=\; 0 \Longrightarrow$$

$$0 \;=\; -2y'(-1) + 1 - y'(-1)\cdot\exp(0) - \exp(0)\cdot(1+y'(-1)) \;=\; -4y'(-1)\,.$$

$$T_1(x;-1) \;=\; g(-1) + g'(-1)(x+1) \;=\; 1\,.$$



b) [**4 Punkte**]

$$\mathbf{K}(\,\boldsymbol{c}\,(t)) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) - t \cdot \sin(t) \\ \sin(t) + t \cdot \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

$$\int_1^3 < K(\boldsymbol{c}(t), \dot{\boldsymbol{c}}(t) > \,dt = \int_1^3 (\cos^2(t) - t\sin(t)\cos(t) \,+\, \sin^2(t) \,+\, t\sin(t)\cos(t) \,+ t^2)\,dt$$

$$= \int_1^3 (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}\,.$$

c) [**3 Punkte**] Übergang zu Polarkoordinaten in x, y ergibt

$$\begin{aligned} V &= \int_K 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r\;\mathrm{d}z\;\mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3 \mathrm{d}\varphi\;\mathrm{d}r \;=\; 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\;\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\,. \end{aligned}$$