

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

- a) Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{f}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (ye^{xy} + z \cos x, xe^{xy} + z^2, \sin x + 2yz)^T.$$

- b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T.$$

- (i) Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{g}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{g}$ und
(ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 6:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ die Richtungsableitung im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{2x^2 + 3y^2} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

- Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
- Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ alle Richtungsableitungen.
- Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 8:

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a) $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{f}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_2} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = rt \\ v = \ln(s+t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ u \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(u(r, s, t), v(r, s, t)) .$$

b) $\mathbf{g} :]0, \infty[\times]0, \pi/2[\xrightarrow{\mathbf{g}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}_2} \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix} = \mathbf{g}(x(r, t), y(r, t)) .$$

c) $\mathbf{h} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \xrightarrow{\mathbf{h}_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{h}_2} \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x = 1/(t^3 + 1) \\ y = t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ xy^2 \end{pmatrix} = \mathbf{h}(x(t), y(t)) .$$

Abgabetermin: 9.11. - 13.11. (zu Beginn der Übung)