

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 7

#### Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2)^T$$

und das Gebiet  $G$ , das durch die beiden Kurven  $x = y^2$  und  $y = x^2$  eingeschlossen wird.

#### Aufgabe 26:

Gegeben sei die Mantelfläche

$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4, |z| \leq x + 2\}$$

eines durch zwei Ebenen begrenzten Zylinders.

- Man zeichne die Ebenen und die begrenzte Mantelfläche  $M$ ,
- parametrisiere  $M$  und
- berechne den Flächeninhalt von  $M$  mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

*Hinweis:* In b) eignen sich Zylinderkoordinaten.

**Aufgabe 27:**

Gegeben seien der Körper

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3 + yz, y^3 + x, z^2)^T.$$

- a) Man skizziere  $K$  und gebe Parametrisierungen für die beiden glatten Flächenstücke  $D$  und  $M$  an, die  $K$  beranden.
- b) Man berechne das Volumenintegral  $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} d(x, y, z)$ , sowie die einzelnen Flüsse von  $\mathbf{f}$  durch die Flächenstücke  $D$  und  $M$ . Man bestätige damit für dieses Beispiel den Gaußschen Integralsatz.

**Aufgabe 28:**

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(x, y, z) = (z, x, y)^T$  einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad z = x^2 - y^2 \right\}.$$

- a) Man zeichne die Fläche  $F$ .
- b) Man berechne auf  $F$  das Integral über alle Wirbelstärken  $\int_F \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{o}$ .
- c) Man berechne die Zirkulation  $\oint_{\partial F} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  von  $\mathbf{v}$  längs der Randkurve  $\partial F$  von  $F$  und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ .

**Abgabetermin:** 1.2. - 5.2. (zu Beginn der Übung)