

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2009/10

1

Kapitel 1: Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei

$f(x_1, \dots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt

Beispiel:

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.

Jede Größe p , V und T lässt sich als Funktion der anderen darstellen:

$$p = p(V, T) = \frac{RT}{V}$$
$$V = V(p, T) = \frac{RT}{p}$$

2

$$T = T(p, V) = \frac{pV}{R}$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in D$.

- 1) $f(\mathbf{x})$ heißt in \mathbf{x}^0 nach x_i **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + te_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n)}{t} \end{aligned}$$

existiert. Dabei bezeichnet e_i den i -ten Einheitsvektor.

Den Grenzwert nennt man die **partielle Ableitung** von $f(\mathbf{x})$ nach x_i im Punkt \mathbf{x}^0 .

- 2) Existieren für jeden Punkt \mathbf{x}^0 die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen $x_i, i = 1, \dots, n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(\mathbf{x})$ **stetig partiell differenzierbar** oder eine **C^1 -Funktion**.

Beispiele:

1) Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ -Funktion.

2) Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 , aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht!**

4

Konkretes Beispiel:

Der Schalldruck einer 1-d Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x, t) = A \sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die örtliche Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldruckes.

5

Bemerkungen:

1) Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2}, \quad g(\mathbf{x}) \neq 0$$

2) Man verwendet auch **andere Bezeichnungen**:

$$D_i f(\mathbf{x}^0) \quad \text{oder} \quad f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$$

6

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einem Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbar.

1) Der **Zeilenvektor**

$$Df(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)$$

heißt **die Ableitung von $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0** .

2) Man schreibt auch als **Spaltenvektor**:

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^0) = \nabla f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)^T$$

und bezeichnet dies als **Gradient**, den symbolischen Vektor

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

als den **Nabla-Operator**.

7

Bemerkung: Seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar auf D .
Dann gelten die folgenden **Differentiationsregeln**:

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \text{grad} f + \beta \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad} f + f \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g \cdot \text{grad} f - f \cdot \text{grad} g), \quad g \neq 0$$

Beispiel:

1) Sei $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\text{grad} f(x, y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y)^T = e^x(\sin y, \cos y)^T$$

2) Für $r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2$ gilt:

$$\text{grad} r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (\mathbf{x} \neq 0)$$

8

Wichtige Beobachtung:

Eine nach allen Koordinaten partiell differenzierbare Funktion ist
NICHT unbedingt stetig!!!

Beispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} & : \text{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & : \text{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf **ganz** \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar und

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

9

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Berechnung der partiellen Ableitungen im Punkt $(x^0, y^0) = (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{t \cdot 0}{(t^2 + 0^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{0 \cdot t}{(0^2 + t^2)^2} = 0$$

Aber: Im Punkt $(x^0, y^0) = (0, 0)$ ist die Funktion **nicht** stetig:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty$$

Also gilt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0$$

Damit eine partiell differenzierbare Funktion **auch** stetig ist, benötigt man zusätzliche Eigenschaften, z.B.

Alle partiellen Ableitungen sind beschränkt.

Satz:

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, dort **beschränkt**, so ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in \mathbf{x}^0 .

Bemerkung:

In unserem **Beispiel** sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung vom Punkt $(x^0, y^0) = (0, 0)$ **nicht** beschränkt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Beweis des Satzes:

Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, ε hinreichend klein, schreiben wir:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)) \\ &+ (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\ &\vdots \\ &+ (f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)) \end{aligned}$$

Bei jeder Differenz auf der linken Seite, betrachten wir f als eine Funktion **einer** Variablen, zum Beispiel

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz:

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0 .

12

Anwendung des **MWS** für Funktionen **einer** Variablen auf jeden Term der rechten Seite ergibt:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\ &\vdots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0) \end{aligned}$$

Sind die partiellen Ableitungen in der Umgebung $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$ **beschränkt**, so gilt:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq C_1|x_1 - x_1^0| + \dots + C_n|x_n - x_n^0|$$

und damit ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in \mathbf{x}^0 , denn

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}^0) \quad \text{für} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \rightarrow 0$$

13

Höhere Ableitungen

Definition:

Eine skalare Funktion $f(\mathbf{x})$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen wiederum partiell differenzierbar, so erhält man **die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Sei nun $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

Definition: (Fortsetzung)

Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **k -fach partiell differenzierbar**, falls alle Ableitungen der Ordnung k auf D existieren:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$$

Sind all diese Ableitungen zudem stetig, so heißt die Funktion $f(\mathbf{x})$ **k -fach stetig partiell differenzierbar** oder auch **C^k -Funktion** auf D , $k = 1, 2, 3, \dots$

Stetige Funktionen $f(\mathbf{x})$ nennt man auch **C^0 -Funktionen**.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$.

Dann gilt:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_n \dots \partial x_1} = ?$$

15

ACHTUNG:

Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist

i. Allg. **nicht beliebig vertauschbar!**

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Man berechnet direkt

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = +1$$

16

Satz: (Vertauschbarkeitssatz von Schwarz)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^2 -Funktion, so gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

Beweisidee:

Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Folgerung:

Ist $f(x)$ eine C^k -Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k -ten Ordnung **beliebig** vertauschen!

17

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

Zu berechnen ist die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz} .

Die Reihenfolge der Ableitungen ist vertauschbar, da $f \in C^3$.

1) Leite zunächst nach z ab:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

2) Jetzt leiten wir f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2}) \right) \\ &= 3x^2 y^2 \cos(x^3) + 68xz e^{x^2} \end{aligned}$$

3) Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir:

$$f_{xyz} = 6x^2 y \cos(x^3)$$

18

Der **Laplace–Operator** ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ ist also

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

Bedeutung: Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$u_{tt} = \Delta u \quad (\text{Wellengleichung})$$

$$u_t = \Delta u \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace–Gleichung oder Potentialgleichung})$$

19

Vektorwertige Funktionen

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine vektorwertige Funktion.

Die Funktion f heißt **partiell differenzierbar** in $\mathbf{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

existieren.

Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

20

Definition:

Für $m = n$ nennt man die Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(\mathbf{x})$ von $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ eine \mathcal{C}^k -Funktion, so nennt man \mathbf{f} ein \mathcal{C}^k -**Vektorfeld**.

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen,
- elektromagnetische Felder oder
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

21

Andere Notationen:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

Bemerkung:

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) &= \alpha \operatorname{div} \mathbf{f} + \beta \operatorname{div} \mathbf{g} \\ \operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= (\nabla \varphi, \mathbf{f}) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{f}\end{aligned}$$

Bemerkung:

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion, so gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition:

Für partiell differenzierbares Vektorfeld im \mathbb{R}^3 , $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Big|_{\mathbf{x}^0}$$

22

Andere Notationen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung:

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) &= \alpha \operatorname{rot} \mathbf{f} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{g} \\ \operatorname{rot}(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= (\nabla \varphi) \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f}\end{aligned}$$

Bemerkung:

Ist $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine \mathcal{C}^2 -Funktion, so folgt aufgrund des Vertauschbarkeitssatzes von Schwarz

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0,$$

d.h. Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

23

1.2 Das vollständige Differential

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **differenzierbar** in \mathbf{x}^0 (oder **vollständig** bzw. **total differenzierbar**), falls es eine lineare Abbildung

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

d.h.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0$$

erfüllt ist.

24

Bezeichnungen:

Man nennt die lineare Abbildung l das (**vollständige** oder **totale**) **Differential** von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 und bezeichnet l mit $df(\mathbf{x}^0)$.

Die zugehörige Matrix \mathbf{A} heißt **Jacobi-Matrix** oder **Funktionalmatrix** von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 und wird mit $\mathbf{J} f(\mathbf{x}^0)$ (manchmal auch mit $Df(\mathbf{x}^0)$ oder $f'(\mathbf{x}^0)$) bezeichnet.

Bemerkung:

Für $m = n = 1$ erhalten wir die aus Analysis I bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0 .

Bemerkung:

Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ein Zeilenvektor und $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}^T, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$.

25

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

- a) Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so ist $f(\mathbf{x})$ auch stetig in \mathbf{x}^0 .
- b) Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so ist das Differential und damit auch die Jacobi-Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ Df_m(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

- c) Ist $f(\mathbf{x})$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion auf D , so ist $f(\mathbf{x})$ auf D (vollständig) differenzierbar.

Bemerkung:

Man beachte, dass **differenzierbar** hier **vollständig/total** differenzierbar bedeutet.

26

Beweis von a):

Ist f in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)\| &\leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| + \|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion f stetig im Punkt \mathbf{x}^0 .

27

Beweis von b):

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Da f im Punkt \mathbf{x}^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} &= \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{|t|} - \frac{t\mathbf{A}\mathbf{e}_i}{|t|} \\ &= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

28

Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \quad i = 1, \dots, n$$

Beispiel:

- a) Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1)$$

- b) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich in der Form

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos s & 2 \cos s & 3 \cos s \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

29

Beispiele:

- c) Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- d) Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{e}_i \rangle \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$

30

Satz: (Differentiationsregeln)

- 1) **Linearität** Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha f(\mathbf{x}^0) + \beta g(\mathbf{x}^0)$, α, β reell, differenzierbar in \mathbf{x}^0 und es gilt

$$d(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}^0) = \alpha df(\mathbf{x}^0) + \beta dg(\mathbf{x}^0)$$

$$\mathbf{J}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}^0) = \alpha \mathbf{J}f(\mathbf{x}^0) + \beta \mathbf{J}g(\mathbf{x}^0)$$

- 2) **Kettenregel** Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, und ist $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in \mathbf{x}^0 differenzierbar.

Für die Differentiale gilt

$$d(g \circ f)(\mathbf{x}^0) = dg(\mathbf{y}^0) \circ df(\mathbf{x}^0)$$

und analog für die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}(g \circ f)(\mathbf{x}^0) = \mathbf{J}g(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{J}f(\mathbf{x}^0)$$

31

Beispiel: (zur Kettenregel)

Sei $\mathbf{h} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $\mathbf{x}^0 = \mathbf{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$(f \circ \mathbf{h})(t) = f(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{h})'(t_0) &= \mathbf{J}f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{J}\mathbf{h}(t_0) \\ &= Df(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{h}'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t_0)) \cdot h_k'(t_0) \end{aligned}$$

32

Richtungsableitungen

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$. Für einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

die **Richtungsableitung (Gateaux–Ableitung)** von $f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} .

Beispiel: Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + (y+t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t} \\ &= 2(x + y) \end{aligned}$$

33

Bemerkung:

- 1) Für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ist die Richtungsableitung gerade die partielle Ableitung nach x_i :

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

- 2) Ist \mathbf{v} ein Einheitsvektor, also $\|\mathbf{v}\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ die Steigung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} .
- 3) Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 und es gilt:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \text{grad } f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v}$$

Dies folgt aus Anwendung der Kettenregel für $\mathbf{h}(t) := \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h})|_{t=0} = \text{grad } f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{h}'(0)$$

34

Satz: (Eigenschaften des Gradienten)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $\mathbf{x}^0 \in D$ differenzierbar.

- 1) Der Gradientenvektor $\text{grad } f(\mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der **Niveaumenge**

$$N_{\mathbf{x}^0} := \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch **Höhenlinien**, im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch **Äquipotentialflächen**.

- 2) Der Gradient $\text{grad } f(\mathbf{x}^0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 an.

Beweisidee:

- 1) Anwendung der Kettenregel

35

- 2) Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)| \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x}^0)\|_2$$

Krummlinige Koordinaten

Sei $\Phi : U \rightarrow V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, für die die Jacobimatrix $\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}^0)$ an jeder Stelle $\mathbf{u}^0 \in U$ regulär ist.

Weiter existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ und sei ebenfalls eine \mathcal{C}^1 -Abbildung.

Dann definiert $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ eine Koordinatentransformation von den Koordinaten \mathbf{u} auf \mathbf{x} .

Beispiel: Polarkoordinaten

Betrachte für $n = 2$ die (Polar)Koordinaten $\mathbf{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y)$.

36

Umrechnung von partiellen Ableitungen von \mathbf{u} auf \mathbf{x}

Zunächst gelten für alle $\mathbf{u} \in U$ mit $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ die folgenden Relationen:

$$\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^{-1}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(\mathbf{u}) := \tilde{f}(\Phi(\mathbf{u}))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

37

mit

$$g^{ij} := \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) := (g^{ij}) = (\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}))^T$$

Abkürzende Schreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

mit

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (\mathbf{J} \Phi)^{-T} = (\mathbf{J} \Phi^{-1})^T$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion Φ^{-1} .

Beispiel: (Polarkoordinaten)

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

39

Die Umrechnung der partiellen Ableitungen lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Damit lässt sich etwa der **Laplace-Operator** auf Polarkoordinaten umrechnen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

40

Beispiel: (Kugelkoordinaten)

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

41

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

42

1.3 Mittelwertsätze und Taylor-Entwicklungen

Mittelwertsatz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare, **skalare** Funktion. Ferner seien $a, b \in D$ Punkte in D , so dass die Verbindungsstrecke

$$[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$$

ganz in D liegt.

Dann gibt es eine Zahl $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f(b) - f(a) = \text{grad } f(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a)$$

Beweis: Wir setzen

$$h(t) := f(a + t(b - a))$$

Aus dem MWS für eine Veränderliche folgt dann mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= h(1) - h(0) = h'(\theta) \cdot (1 - 0) \\ &= \text{grad } f(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a) \end{aligned}$$

43

Bemerkung: Gilt die Bedingung $[a, b] \subset D$ für **alle** Punkte $a, b \in D$, so heißt die Menge D **konvex**.

Beispiel: (zum Mittelwertsatz)

Gegeben sei die skalare Funktion

$$f(x, y) := \cos x + \sin y$$

Offensichtlich gilt

$$f(0, 0) = f(\pi/2, \pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(\pi/2, \pi/2) - f(0, 0) = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\text{grad } f \left(\theta \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} = 0$$

In der Tat gilt diese Beziehung für $\theta = \frac{1}{2}$.

44

ACHTUNG:

Der Mittelwertsatz für mehrere Variablen gilt nur für **skalare** Funktionen!!!

Beispiel: Betrachte die **vektorwertige** Funktion

$$\mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

Nun gilt

$$\mathbf{f}(\pi/2) - \mathbf{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}'\left(\theta \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta\pi/2) \\ \cos(\theta\pi/2) \end{pmatrix}$$

45

Die Vektoren auf der rechten Seite haben die Längen $\sqrt{2}$ bzw. $\pi/2$!

Satz: (Mittelwert–Abschätzungssatz)

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Ferner seien \mathbf{a}, \mathbf{b} Punkte in D mit $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset D$.

Dann existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\|_2 \leq \|\mathbf{J}f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_2$$

Beweis:

Anwendung des Mittelwertsatzes auf die **skalare** Funktion $g(\mathbf{x})$ definiert durch

$$g(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}))^T f(\mathbf{x})$$

Bemerkung:

Eine andere (abgeschwächte) Form der Mittelwert–Abschätzung ist

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq \sup_{\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|\mathbf{J}f(\xi)\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektor– bzw. zugehörige Matrixnorm ist.

46

Taylor–Entwicklungen für skalare Funktionen mehrerer Variablen

Zunächst definieren wir einen sogenannten **Multiindex** $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ als

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

Weiter sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbar, so setzen wir

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

wobei $D_i^{\alpha_i} = \underbrace{D_i \dots D_i}_{\alpha_i\text{-mal}}$ und schreiben für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

47

Satz von Taylor:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^{m+1} -Funktion und sei $\mathbf{x}_0 \in D$.

Dann gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die folgende Entwicklung nach Taylor:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) + R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) \\ T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \\ R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) &= \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \end{aligned}$$

mit einem geeigneten $\theta \in (0, 1)$.

Beachte: Summation über $|\alpha| \leq m$ und $|\alpha| = m + 1$.

48

Herleitung der Taylorformel:

Wir definieren eine skalare Funktion einer Variablen $t \in [0, 1]$ als

$$g(t) := f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$$

und berechnen die Taylor-Entwicklung um $t = 0$.

Es gilt:

$$g(1) = g(0) + g'(0) \cdot (1 - 0) + \frac{1}{2} g''(\xi) \cdot (1 - 0)^2, \quad \xi \in (0, 1)$$

Berechnung von $g'(0)$:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \left. \frac{d}{dt} f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + t(x_n - x_n^0)) \right|_{t=0} \\ &= D_1 f(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_n f(\mathbf{x}_0)(x_n - x_n^0) \\ &= \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \end{aligned}$$

49

Taylor-Entwicklung um $t = 0$

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{6}g^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (0, 1)$$

Berechnung von $g''(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g''(0) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} (D_{11}f(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0)^2 + D_{21}f(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \\ &\quad + \dots + D_{ij}f(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \dots + \\ &\quad + D_{n-1,n}f(\mathbf{x}_0)(x_{n-1} - x_{n-1}^0)(x_n - x_n^0) + D_{nn}f(\mathbf{x}_0)(x_n - x_n^0)^2) \\ &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \quad (\text{Vertauschungssatz von Schwarz!}) \end{aligned}$$

50

Beweis der Taylor-Formel mittels vollständiger Induktion!

Beispiel:

Berechne das Taylor–Polynom $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ zweiten Grades der Funktion

$$f(x, y, z) = x y^2 \sin z$$

zum Entwicklungspunkt $(x, y, z) = (1, 2, 0)^T$.

Zur Berechnung von $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ benötigen wir die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung.

Diese Ableitungen müssen am Punkt $(x, y, z) = (1, 2, 0)^T$ ausgewertet werden.

Als Ergebnis erhält man $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ in der Form

$$T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = 4z(x + y - 2)$$

Berechnung auf Folie

51

Beispiel:

Man berechne das Taylor–Polynom $T_3(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ dritten Grades der Funktion

$$f(x, y) = e^y \cos x$$

zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$:

- 1) unter Verwendung des Taylorschen Satzes,
- 2) unter Verwendung bekannter Reihenentwicklungen.

Berechnung auf Folie

52

Bemerkung:

- 1) Das Restglied eines Taylor-Polynoms enthält **alle** partiellen Ableitungen der Ordnung $(m + 1)$:

$$R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha$$

Sind all diese Ableitungen in der Nähe von \mathbf{x}_0 beschränkt durch C , so gilt die **Restgliedabschätzung**

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1}$$

Für die Approximationsgüte des Taylor-Polynoms einer C^{m+1} -Funktion folgt daher

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{m+1})$$

53

Bemerkung: (Fortsetzung)

- 2) Man nennt die Matrix

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}_0 .

Hesse-Matrix = Jacobi-Matrix des Gradienten ∇f

Die Taylor-Entwicklung einer C^3 -Funktion lautet daher

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad } f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3)$$

Die Hesse-Matrix einer C^2 -Funktion ist **symmetrisch**.

54

Kapitel 2: Anwendung der Differentialrechnung mehrerer Variablen

2.1 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^0 \in D$.

1) $f(\mathbf{x})$ hat in \mathbf{x}^0 ein **globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$$

2) $f(\mathbf{x})$ hat in \mathbf{x}^0 ein **strenges globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}^0\} : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$$

3) $f(\mathbf{x})$ hat in \mathbf{x}^0 ein **lokales Maximum**, falls es ein ε gibt mit:

$$\forall \mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$$

55

4) $f(\mathbf{x})$ hat in \mathbf{x}^0 ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein ε gibt mit:

$$\forall \mathbf{x} \in D : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon \Rightarrow f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$$

Analoge Definitionen für minimale Werte (siehe **Analysis I**)

Satz: (Notwendige Bedingung I)

Besitzt $f(x)$ mit $f \in C^2$ in einem Punkt $x^0 \in D^0$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so gilt $\text{grad } f(x^0) = (0, \dots, 0)^T$.

Beweis:

Für ein beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ ist die Funktion

$$\varphi(t) := f(x^0 + tv)$$

in einer Umgebung von $t^0 = 0$ stetig differenzierbar.

Gleichzeitig hat $\varphi(t)$ bei $t^0 = 0$ ein lokales Extremum. Damit folgt:

$$\varphi'(0) = \text{grad } f(x^0) v = 0$$

Da dies für alle $v \neq 0$ gilt, folgt die Bedingung:

$$\text{grad } f(x^0) = (0, \dots, 0)^T$$

56

Bemerkung:

- 1) Die Bedingung $\text{grad } f(x^0) = (0, \dots, 0)^T$ definiert gewöhnlich ein nichtlineares Gleichungssystem zur Berechnung von $x = x^0$, wobei n Gleichungen für n Unbekannte gegeben sind.

- 2) Die Punkte $x^0 \in D^0$ mit $\text{grad } f(x^0) = (0, \dots, 0)^T$ nennt man **stationäre Punkte** von $f(x)$. Stationäre Punkte sind **nicht** immer lokale Extremwerte. Zum Beispiel besitzt die Funktion

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

den Gradienten

$$\text{grad } f(x, y) = 2(x, -y)$$

und hat daher nur einen stationären Punkt $x^0 = (0, 0)^T$, dieser ist jedoch ein **Sattelpunkt** von $f(x)$.

57

Satz: (Klassifikation stationärer Punkte)

Sei $f(x)$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion auf D^0 und $x^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt von $f(x)$, d.h. $\text{grad } f(x^0) = (0, \dots, 0)^T$.

1) Notwendige Bedingung II

Ist x^0 ein lokales Extremum von $f(x)$, so gilt:

x^0 lokales Minimum $\Rightarrow \mathbf{H} f(x^0)$ positiv semidefinit

x^0 lokales Maximum $\Rightarrow \mathbf{H} f(x^0)$ negativ semidefinit

2) Hinreichende Bedingung

Ist $\mathbf{H} f(x^0)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist x^0 ein strenges

lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(x)$.

Ist $\mathbf{H} f(x^0)$ indefinit, so ist x^0 ein Sattelpunkt, d.h. es gibt in jeder

Umgebung von x^0 Punkte x^1 und x^2 mit

$$f(x^1) < f(x^0) < f(x^2)$$

Beweis: (zu Teil 1))

Sei x^0 ein lokales Minimum. Für $v \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein folgt aus der Taylor-Formel

$$(1) \quad f(x^0 + \varepsilon v) - f(x^0) = \frac{1}{2}(\varepsilon v)^T \mathbf{H} f(x^0 + \theta \varepsilon v)(\varepsilon v) \geq 0$$

mit $\theta = \theta(\varepsilon, v) \in (0, 1)$.

Der Gradient in der Taylorentwicklung entfällt, da $\text{grad } f(x^0) = (0, \dots, 0)^T$ gilt.

Wegen (1) gilt auch

$$(2) \quad v^T \mathbf{H} f(x^0 + \theta \varepsilon v) v \geq 0$$

Da $f(x)$ eine C^2 -Funktion ist, ist die Hesse-Matrix eine **stetige** Abbildung. Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt daher aus (2)

$$v^T \mathbf{H} f(x^0) v \geq 0$$

d.h. $\mathbf{H} f(x^0)$ ist positiv semidefinit.

59

Beweis: (zu Teil 2))

Ist $\mathbf{H} f(x^0)$ positiv definit, so ist $\mathbf{H} f(x)$ ebenfalls in einer hinreichend kleinen Umgebung $x \in K_\varepsilon(x^0) \subset D$ positiv definit.

Dies folgt aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen.

Für $x \in K_\varepsilon(x^0)$, $x \neq x^0$ gilt damit

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \frac{1}{2}(x - x^0)^T \mathbf{H} f(x^0 + \theta(x - x^0))(x - x^0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

mit $\theta \in (0, 1)$, d.h. $f(x)$ hat in x^0 ein strenges lokales Minimum.

Ist $\mathbf{H} f(x^0)$ indefinit, so existieren zu Eigenwerten von $\mathbf{H} f(x^0)$ mit verschiedenen Vorzeichen gewisse Eigenvektoren v, w mit (zum Beispiel)

$$v^T \mathbf{H} f(x^0) v > 0 \quad w^T \mathbf{H} f(x^0) w < 0$$

60

Analog zu Teil 1) sieht man dann, dass $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existieren mit

$$f(\mathbf{x}^0 + \varepsilon \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}(\varepsilon \mathbf{v})^T \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0 + \theta_1 \varepsilon \mathbf{v}) (\varepsilon \mathbf{v}) > 0$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ und

$$f(\mathbf{x}^0 + \varepsilon \mathbf{w}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}(\varepsilon \mathbf{w})^T \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0 + \theta_1 \varepsilon \mathbf{w}) (\varepsilon \mathbf{w}) < 0$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$.

Damit ist gezeigt, dass \mathbf{x}^0 ein **Sattelpunkt** von $f(\mathbf{x})$ ist.

Bemerkung: (Geometrische Interpretation)

Die Hesse-Matrix kann positive und negative Eigenwerte besitzen. Die zugehörigen Eigenvektoren geben dabei diejenigen Richtungen an, in denen die Funktion wächst beziehungsweise fällt.

61

Bemerkung:

1) Ein stationärer Punkt \mathbf{x}^0 mit $\det \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) = 0$ heißt **ausgeartet**.

Die Hesse-Matrix besitzt dann einen Eigenwert $\lambda = 0$.

Ist \mathbf{x}^0 **nicht** ausgeartet, so existieren genau drei Fälle:

Alle Eigenwerte $> 0 \Rightarrow \mathbf{x}^0$ ist strenges lokales Minimum

Alle Eigenwerte $< 0 \Rightarrow \mathbf{x}^0$ ist strenges lokales Maximum

\exists Eigenwerte $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \mathbf{x}^0$ Sattelpunkt

2) Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}^0 \text{ lokales Minimum} & \Leftarrow & \mathbf{x}^0 \text{ strenges lokales Minimum} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv semidefinit} & \Leftarrow & \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv definit} \end{array}$$

62

Bemerkung: (Fortsetzung)

3) Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^3 -Funktion, \mathbf{x}^0 ein stationärer Punkt von $f(\mathbf{x})$ und $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit, so gilt die Abschätzung:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq \lambda_{\min} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2$$

wobei λ_{\min} den **kleinsten** Eigenwert der Hesse-Matrix bezeichnet.

Nach dem Satz von Taylor gilt dann:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 + R_3(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) \\ &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 \left(\frac{\lambda_{\min}}{2} - C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \right) \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$.

In der Nähe von \mathbf{x}^0 wächst $f(\mathbf{x})$ also mindestens quadratisch mit dem Abstand von \mathbf{x}^0 .

63

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$$

und suchen die stationären Punkte:

$$\text{grad } f(x, y) = (y^2 + x(3x + 2), 2y(x - 1))^T$$

Die Bedingung $\text{grad } f(x, y) = (0, 0)^T$ liefert die beiden stationären Punkte

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrizen an den Stellen \mathbf{x}^0 und \mathbf{x}^1 lauten

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^0)$ ist indefinit, also ist \mathbf{x}^0 ein Sattelpunkt, $\mathbf{H}f(\mathbf{x}^1)$

64

ist negativ definit, also ist \mathbf{x}^1 ein strenges lokales Maximum von $f(\mathbf{x})$.

2.2 Implizit definierte Funktionen

Untersuche die Lösungsmengen von nichtlinearen Gleichungssystemen der Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

mit $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h. wir betrachten m Gleichungen für n Unbekannte.

Insbesondere gelte:

$$m < n$$

d.h. wir haben **weniger** Gleichungen als Unbekannte.

Man nennt dann das Gleichungssystem **unterbestimmt** und die Lösungsmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ enthält gewöhnlich unendlich viele Punkte.

Frage: Kann man das System $g(\mathbf{x}) = 0$ nach bestimmten Unbekannten, zum Beispiel den letzten m Variablen x_{n-m+1}, \dots, x_n , **auflösen**? Existiert eine Funktion $f(x_1, \dots, x_{n-m})$ mit

$$g(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(x_1, \dots, x_{n-m})$$

Auflösen bedeutet also die letzten m Variablen durch die ersten $n - m$ Variablen zu beschreiben.

Weitere Frage: Nach welchen m Variablen lässt sich das Gleichungssystem auflösen? Ist die Auflösung global auf dem Definitionsbereich D möglich oder nur lokal auf einer Teilmenge $\tilde{D} \subset D$?

Geometrische Interpretation:

Die Lösungsmenge G von $g(\mathbf{x}) = 0$ lässt sich (zumindest lokal) als Graph einer Funktion f darstellen.

66

Beispiel:

Die Kreisgleichung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (r > 0)$$

definiert ein **unterbestimmtes** nichtlineares Gleichungssystem.

Wir haben **zwei** Unbekannte (x, y) , aber nur eine Gleichung.

Die Kreisgleichung lässt sich **lokal** auflösen und definiert dabei die folgenden vier Funktionen:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r$$

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r$$

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}, \quad -r \leq y \leq r$$

$$x = -\sqrt{r^2 - y^2}, \quad -r \leq y \leq r$$

67

Beispiel:

Sei $g(\mathbf{x})$ eine affin-lineare Funktion, d.h.

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(m,n)}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Wir spalten die Variablen \mathbf{x} in zwei Vektoren auf

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, \dots, x_{n-m})^T \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^m$$

Aufspaltung der Matrix \mathbf{C} ergibt die Darstellung

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m,n-m)}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,m)}$.

Das Gleichungssystem $g(\mathbf{x}) = 0$ ist genau dann nach den Variablen $\mathbf{x}^{(2)}$ (eindeutig) auflösbar, falls \mathbf{A} regulär ist:

$$g(\mathbf{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}^{(2)} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)})$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Wie kann man die Matrix A in Abhängigkeit von g schreiben? Aus der Darstellung

$$g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}^{(1)} + A\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

erkennt man direkt, dass

$$A = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(2)}}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

gilt, d.h. A ist die Jacobi-Matrix der Abbildung $\mathbf{x}^{(2)} \rightarrow g(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ für festes $\mathbf{x}^{(1)}$!

Auflösbarkeit ist also möglich, falls die Jacobi-Matrix regulär ist.

Dies führt auf den

Satz über implizite Funktionen

69

Satz über implizite Funktionen:

Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Die Variablen in D seien (\mathbf{x}, \mathbf{y}) mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Der Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in D$ sei eine Lösung von $g(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$.

Falls

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \end{pmatrix}$$

regulär ist, gibt es Umgebungen U von \mathbf{x}^0 und V von \mathbf{y}^0 , $U \times V \subset D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow V$ mit

$$f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0 \quad \text{und} \quad g(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad (\forall \mathbf{x} \in U)$$

70

und

$$\mathbf{J} f(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \right)$$

Beispiele:

- 1) Für die Kreisgleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $r > 0$ findet

man im Punkt $(x^0, y^0) = (0, r)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, r) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, r) = 2r \neq 0$$

Man kann also in einer Umgebung von $(0, r)$ die Kreisgleichung nach y auflösen:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Ableitung $f'(x)$ kann man durch **implizite Differentiation** berechnen:

$$g(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_x(x, y) + g_y(x, y)y'(x) = 0$$

Also

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Betrachte die Gleichung

$$g(x, y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$$

Es gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{y-x} + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion.

Implizite Differentiation:

$$e^{y-x}(y' - 1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Eine **explizite** Auflösung nach y ist in diesem Fall nicht möglich!

Bemerkung: Implizites Differenzieren einer durch

$$g(x, y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

implizit definierten Funktion $y = f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt:

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$

$$f''(x) = -\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^3}$$

Daher ist der Punkt x^0 ein stationärer Punkt von $f(x)$, falls gilt:

$$g(x^0, y^0) = g_x(x^0, y^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(x^0, y^0) \neq 0$$

Weiter ist x^0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls

$$\frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} > 0 \quad \left(\text{bzw.} \frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} < 0 \right)$$

73

Implizite Darstellung ebener Kurven

Betrachte die Lösungsmenge einer skalaren Gleichungen

$$g(x, y) = 0$$

Gilt

$$\text{grad } g = (g_x, g_y)^T \neq (0, 0)^T$$

So definiert $g(x, y)$ lokal eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = \bar{f}(y)$.

Definition:

- 1) Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x, y) = 0$ mit $\text{grad } g(x^0, y^0) \neq (0, 0)^T$ heißt **regulärer Punkt**.
- 1) Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x, y) = 0$ mit $\text{grad } g(x^0, y^0) = (0, 0)^T$ heißt **singulärer Punkt**.

74

Lemma:

- 1) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathbf{x}^0) = 0, \quad g_y(\mathbf{x}^0) \neq 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine **horizontale Tangente** in \mathbf{x}^0 .

- 2) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathbf{x}^0) \neq 0, \quad g_y(\mathbf{x}^0) = 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine **vertikale Tangente** in \mathbf{x}^0 .

- 3) Ist \mathbf{x}^0 ein **singulärer Punkt** so wird die Lösungsmenge bei \mathbf{x}^0 durch folgende **quadratische Gleichung** approximiert:

$$g_{xx}(\mathbf{x}^0)(x-x^0)^2 + 2g_{xy}(\mathbf{x}^0)(x-x^0)(y-y^0) + g_{yy}(\mathbf{x}^0)(y-y^0)^2 = 0$$

75

Wegen 3) erhält man für $g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} \neq 0^T$:

$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **isolierter Punkt** der Lösungsmenge

$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **Doppelpunkt**

$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **Rückkehrpunkt** oder auch **Spitze**

Interpretation:

- 1) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$, so sind beide Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ entweder strikt positiv oder strikt negativ, d.h. \mathbf{x}^0 ist ein strenges lokales **Minimum** oder **Maximum** von $g(\mathbf{x})$.
- 2) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$, so haben die beiden Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ ein unterschiedliches Vorzeichen, d.h. \mathbf{x}^0 ist ein **Sattelpunkt** von $g(\mathbf{x})$.
- 3) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$, so ist der stationäre Punkt \mathbf{x}^0 von $g(\mathbf{x})$ **ausgeartet**.

76

Beispiele: Wir betrachten jeweils den singulären Punkt x^0 :

1) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x - 2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2 - 4x$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x - 4$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{Hg}(0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $x^0 = 0$ ein isolierter Punkt.

77

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2 + 2xq^2$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x + 2q^2$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{Hg}(0) = \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $x^0 = 0$ für $q \neq 0$ ein Doppelpunkt.

78

Beispiele: (Fortsetzung)

3) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein Rückkehrpunkt.

79

Implizite Darstellung von Flächen

Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ist für $\text{grad } g \neq \mathbf{0}^T$ lokal eine Fläche im \mathbb{R}^3 .

Tangentialebene in \mathbf{x}^0 mit $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und $\text{grad } g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}^T$:

$$g_x(\mathbf{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathbf{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathbf{x}^0)(z - z_0) = 0$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$.

Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0) \neq 0$, so gibt es lokal bei \mathbf{x}^0 eine Darstellung der Form

$$z = f(x, y)$$

Partielle Ableitungen von $f(x, y)$:

$$\text{grad } f(x, y) = (f_x, f_y) = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y) = \left(-\frac{g_x}{g_z}, \frac{g_y}{g_z} \right)$$

80

Das Umkehrproblem

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$y = f(x)$$

mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach x auflösen, also **invertieren**?

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine \mathcal{C}^1 -Funktion.

Ist für ein $x^0 \in D$ die Jacobi-Matrix $Jf(x^0)$ regulär, so gibt es Umgebungen U und V von x^0 und $y^0 = f(x^0)$, so dass f den Bereich U **bijektiv** auf V abbildet.

Die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \rightarrow U$ ist ebenfalls eine \mathcal{C}^1 -Funktion und es gilt für alle $x \in U$:

$$Jf^{-1}(y) = (Jf(x))^{-1}, \quad y = f(x)$$

Bemerkung: Man nennt dann f lokal einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus.

81

2.3 Extremalprobleme unter Nebenbedingungen

Frage:

Welche Abmessungen sollte eine Metaldose haben, damit bei vorgegebenem Volumen der Materialverbrauch am geringsten ist?

Sei r der Radius und h die Höhe. Dann gilt

$$V = \pi r^2 h$$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Setze bei vorgegebenem $c \in \mathbb{R}_+$

$$f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

$$g(x, y) = \pi x^2 y - c = 0$$

Bestimme das Minimum der Funktion $f(x, y)$ auf der Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : g(x, y) = 0\}$$

82

Lösung:

Aus $g(x, y) = \pi x^2 y - c = 0$ folgt

$$y = \frac{c}{\pi x^2}$$

Einsetzen in $f(x, y)$ ergibt

$$h(x) := 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{c}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2c}{x}$$

Bestimme das Minimum der Funktion $h(x)$:

$$h'(x) = 4\pi x - \frac{2c}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi x = \frac{2c}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Hinreichende Bedingung

$$h''(x) = 4\pi + \frac{4c}{x^3} \quad \Rightarrow \quad h''\left(\left(\frac{c}{\pi}\right)^{1/3}\right) = 12\pi > 0$$

83

Allgemein:

Bestimme die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

wobei $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Die Nebenbedingungen lauten also

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

⋮

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Alternativ: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

84

Die Lagrange–Funktion:

Wir definieren folgende erweiterte Funktion $F(\mathbf{x})$:

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suchen die Extremwerte von $F(\mathbf{x})$ für festes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$.

Die Zahlen λ_i , $i = 1, \dots, m$ nennt man **Lagrange–Multiplikatoren**.

Satz: (Lagrange–Lemma)

Minimiert (bzw. maximiert) \mathbf{x}^0 die Lagrange–Funktion $F(\mathbf{x})$ (für ein festes λ) über D und gilt $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, so liefert \mathbf{x}^0 zugleich das Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ über $G := \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Beweis: Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in D$ gilt nach Voraussetzung

$$f(\mathbf{x}^0) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

85

Wählt man speziell $\mathbf{x} \in G$, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, also auch $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x})$.

Bemerkung:

Sind f und $g_i, i = 1, \dots, m, \mathcal{C}^1$ -Funktionen, so ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle \mathbf{x}^0 von $F(\mathbf{x})$ gegeben durch

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}^T$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen $g(\mathbf{x}) = 0$ ergibt sich ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit $(n + m)$ Gleichungen und $(n + m)$ Unbekannten \mathbf{x} und λ .

Die Lösungen $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ sind die Kandidaten für die gesuchten Extremstellen (**Notwendige Bedingung**).

Alternativ: Definiere eine Lagrange-Funktion

$$G(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suche die Extremstellen von $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich \mathbf{x} **und** λ .

86

Bemerkung:

Man kann auch eine **hinreichende** Bedingung aufstellen:

Sind die Funktionen f und g sogar \mathcal{C}^2 -Funktionen und ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange-Funktion positiv (bzw. negativ) definit, so ist \mathbf{x}^0 tatsächlich ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ auf G .

In den meisten Anwendungen ist die hinreichende Bedingung allerdings **nicht** erfüllt, obwohl \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Extremum **ist**.

Insbesondere kann man aus der Indefinitheit der Hesse-Matrix $\mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)$ **nicht** schließen, dass \mathbf{x}^0 kein Extremwert ist.

Ähnlich problematisch ist die hinreichende Bedingung, die man aus der Hesse-Matrix für die Lagrange-Funktion $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich \mathbf{x} **und** λ erhält.

87

Beispiel:

Gesucht seien die Extrema von $f(x, y) := xy$ auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Da die betrachtete Funktion stetig ist und $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, folgt aus der Min–Max–Eigenschaft die Existenz von globalen Maxima und Minima auf K .

Wir betrachten zunächst das Innere K^0 von K , also

$$K^0 := \{(x, y)^T : x^2 + y^2 < 1\}$$

Dies ist eine offene Menge und die notwendige Bedingung für einen Extremwert lautet

$$\text{grad } f = (y, x) = \mathbf{0}^T$$

Also erhalten wir als Kandidaten den Ursprung $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.

88

Beispiel: (Fortsetzung)

Die Hesse–Matrix im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ lautet

$$\mathbf{H}f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und ist **indefinit**. Daher ist \mathbf{x}^0 ein **Sattelpunkt**.

Die Extrema der Funktion müssen also auf dem Rand liegen, der eine Gleichungsnebenbedingung darstellt:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Wir suchen also die Extremwerte von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Die Lagrange–Funktion lautet

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

89

Damit ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$y + 2\lambda x = 0$$

$$x + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

mit den vier Lösungen

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5})^T \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})^T$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(3)} = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})^T \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5})^T$$

Minima und Maxima lassen sich nun einfach aus den Funktionswerten ablesen

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = -0.5 \quad f(\mathbf{x}^{(3)}) = f(\mathbf{x}^{(4)}) = 0.5$$

d.h. Minima sind $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$, Maxima $\mathbf{x}^{(3)}$ und $\mathbf{x}^{(4)}$.

90

Satz: (Lagrange–Multiplikatoren–Regel)

Seien $f, g_1, \dots, g_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils C^1 –Funktionen, und sei $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$.

Ferner gelte die **Regularitätsbedingung**

$$\text{Rang}(\mathbf{J} \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)) = m$$

Dann existieren Lagrange–Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so dass für die Lagrange Funktion

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

die folgende **notwendige Bedingung erster Ordnung** gilt:

$$\text{grad} F(\mathbf{x}^0) = 0$$

91

Bemerkung:

1) Notwendige Bedingung zweiter Ordnung

Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Minimum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, ist die Regularitätsbedingung erfüllt und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ zugehörige Lagrange-Multiplikatoren, so ist die Hesse-Matrix $\mathbf{HF}(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange-Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum

$$TG(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{grad } g_i(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0, i = 1, \dots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{y}^T \mathbf{HF}(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in TG(\mathbf{x}^0)$$

92

Bemerkung: (Fortsetzung)

2) Hinreichende Bedingung

Ist für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in G$ die Regularitätsbedingung erfüllt, existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so dass \mathbf{x}^0 ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange-Funktion ist, und ist die Hesse-Matrix $\mathbf{HF}(\mathbf{x}^0)$ positiv definit auf dem Tangentialraum $TG(\mathbf{x}^0)$, d.h., gilt

$$\mathbf{y}^T \mathbf{HF}(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} > 0 \quad \forall \mathbf{y} \in TG(\mathbf{x}^0)$$

so ist \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Minimum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$.

93

Beispiel:

Man bestimme das globale Maximum der Funktion

$$f(x, y) = -x^2 + 8x - y^2 + 9$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$F(x, y) = -x^2 + 8x - y^2 + 9 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare System

$$-2x + 8 = -2\lambda x$$

$$-2y = -2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

94

Beispiel: (Fortsetzung)

$$-2x + 8 = -2\lambda x$$

$$-2y = -2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq 1$. Verwendet man dies in der zweiten Gleichung, so gilt $y = 0$. Aus der dritten Gleichung erkennt man sofort $x = \pm 1$.

Demnach sind die beiden Punkte $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (-1, 0)$ Kandidaten für das globale Maximum. Wegen

$$f(1, 0) = 16 \quad f(-1, 0) = 0$$

liegt das globale Maximum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ im Punkt $(x, y) = (1, 0)$.

95

Beispiel: Man bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$$

auf dem Durchschnitt des Zylinders

$$Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2\}$$

mit der Ebene

$$E := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1\}$$

Umformulierung: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$g_2(x, y, z) := x + z - 1 = 0$$

96

Beispiel: (Fortsetzung)

Die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2, d.h. wir können über die Lagrange-Funktion Extremwerte bestimmen:

$$F(x, y, z) = 2x + 3y + 2z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$3 + 2\lambda_1 y = 0$$

$$2 + \lambda_2 = 0$$

97

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x + z = 1$$

Beispiel: (Fortsetzung)

$$2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$3 + 2\lambda_1 y = 0$$

$$2 + \lambda_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x + z = 1$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$2\lambda_1 x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $x = 0$.

Damit ergeben sich die möglichen Extremwerte als

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \quad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$$

Die möglichen Extremwerte sind also

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \quad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$$

Man berechnet nun die zugehörigen Funktionswerte

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 3\sqrt{2} + 2$$

$$f(0, -\sqrt{2}, 1) = -3\sqrt{2} + 2$$

Daher liegt im Punkt $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$ ein Maximum, im Punkt $(x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$ ein Minimum.

99

2.4 Das Newton–Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Problem: Wir suchen die Nullstellen einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$D \subset \mathbb{R}^n$:

$$f(\mathbf{x}) = 0$$

Wir kennen bereits die **Fixpunktiteration**

$$\mathbf{x}^{k+1} := \Phi(\mathbf{x}^k)$$

mit Startwert \mathbf{x}^0 und Iterationsvorschrift $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Konvergenzaussagen liefert der **Banachsche Fixpunktsatz**.

Vorteil: Verfahren ist **ableitungsfrei**

Nachteile:

100

- Numerisches Verfahren konvergiert langsam (linear),
- Keine eindeutige Iterationsvorschrift.

Alternative: Newton–Verfahren für vektorwertige Funktionen

Gegeben sei eine \mathcal{C}^1 –Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir suchen eine Nullstelle, d.h. ein $\mathbf{x}^* \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Taylor–Entwicklung von $f(\mathbf{x})$ um einen Startwert \mathbf{x}^0 lautet

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

Setzen wir $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, so folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \approx -f(\mathbf{x}^0)$$

Eine Näherungslösung für \mathbf{x}^* ist dann \mathbf{x}^1 , die Lösung des LGS

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) = -f(\mathbf{x}^0)$$

Das **Newton–Verfahren** lautet somit

für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta \mathbf{x}^k = -f(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$$

Man muss also im Newton–Verfahren in jedem Iterationsschritt ein LGS lösen. Die Lösung $\Delta \mathbf{x}^k$ heißt **Newton–Korrektur**.

Das Newton–Verfahren ist **skalierungsinvariant**:

Satz: Das Newton–Verfahren ist invariant unter allen Transformationen (Skalierungen) der Form

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}f(\mathbf{x})$$

mit einer regulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, d.h. die Iterierten für f und g sind identisch.

102

Satz: (Konvergenzsatz)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 –Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

Sei $\mathbf{x}^* \in D$ mit $f(\mathbf{x}^*) = 0$. Die Jacobi–Matrix $\mathbf{J}f(\mathbf{x})$ sei regulär für $\mathbf{x} \in D$, und es gelte eine Lipschitz–Bedingung

$$\|(\mathbf{J}f(\mathbf{x}))^{-1}(\mathbf{J}f(\mathbf{y}) - \mathbf{J}f(\mathbf{x}))\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ mit $L > 0$.

Für alle Startwerte $\mathbf{x}^0 \in D$ mit

$$\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \frac{2}{L} =: r \quad \text{und} \quad K_r(\mathbf{x}^*) \subset D$$

ist dann das Newton–Verfahren wohldefiniert mit $\mathbf{x}^k \in K_r(\mathbf{x}^*)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, und die Newton–Iterierten \mathbf{x}^k konvergieren **quadratisch** gegen \mathbf{x}^* :

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2$$

103

Ferner ist \mathbf{x}^* die einzige Nullstelle von $f(\mathbf{x})$ innerhalb $K_r(\mathbf{x}^*)$.

Das gedämpfte Newton–Verfahren

Das Newton–Verfahren konvergiert zwar quadratisch, aber nur **lokal**.

Globale Konvergenz kann durch einen Dämpfungsterm verbessert werden:

für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta \mathbf{x}^k = -f(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k$$

Gedämpfte Newton–Verfahren mit **Dämpfungsparameter** $\lambda_k \in (0, 1]$.

Frage: Wie wählt man die Dämpfungsfaktoren λ_k ?

Verwende eine **Testfunktion** $T(\mathbf{x})$ mit

$$T(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

$$T(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

sodass die Folge $T(\mathbf{x}^k)$ monoton fällt.

Bemerkung:

Befindet man sich beim gedämpften Newton–Verfahren *in der Nähe* der gesuchten Lösung \mathbf{x}^* , so sollte $\lambda_k = 1$ gewählt werden. Nur das sichert die (lokale) quadratische Konvergenz.

Beispiel:

Bei praktischen Anwendungen verwendet man häufig die Testfunktion

$$T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2$$

Für diesen Fall gilt der folgende Satz.

Satz:

Sei \mathbf{f} eine \mathcal{C}^1 –Funktion auf der offenen und konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$.

Für $\mathbf{x}^k \in D$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$ gilt dann:

$$\exists \mu_k : \forall \lambda \in (0, \mu_k) : \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda \Delta x^k)\|_2^2 < \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2^2$$

Dämpfungsstrategie:

$k = 0$: Man wähle $\lambda_0 \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \lambda_{min}\}$ möglichst groß,
so dass gilt:

$$T(\mathbf{x}^0 + \lambda_0 \Delta \mathbf{x}^0) < T(\mathbf{x}^0)$$

$k > 0$: $\lambda_k := \lambda_{k-1}$

falls $T(\mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k) < T(\mathbf{x}^k)$:

$$\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k$$

$$\lambda_k := \begin{cases} \lambda_k & : \text{ falls } \lambda_k = 1 \\ 2\lambda_k & : \text{ sonst} \end{cases}$$

107

Dämpfungsstrategie: (Fortsetzung)

sonst:

$$\mu = \max \left\{ \frac{\lambda_k}{2}, \frac{\lambda_k}{4}, \dots, \lambda_{min} \right\}$$

so dass $T(\mathbf{x}^k + \mu \Delta \mathbf{x}^k) < T(\mathbf{x}^k)$

$$\lambda_k := \mu$$

Bemerkung: Die Testfunktion ist **nicht** skalierungsinvariant.
Daher ist der sogenannte **natürliche Monotonietest** sinnvoll:

$$\|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1})\| < \|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|$$

Es gilt dabei:

$$\|\Delta \mathbf{x}^k\| = \|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|$$

108

Kapitel 3: Integralrechnung mehrerer Variablen

3.1 Bereichsintegrale

Gegeben sei eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von $f(\mathbf{x})$:

$$V = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Erinnerung Analysis II:

Riemann–Integral einer Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Das Integral war als Grenzwert von Ober– und Untersumme, für den Fall, dass die Feinheit der Zerlegung gegen Null strebt und ein gemeinsamer Grenzwert existiert, definiert.

Konstruktionsprinzip des Integrals mehrerer Veränderlichen analog,

aber der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Zunächst betrachten wir $n = 2$ und einen Definitionsbereich D der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck).

Weiter sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition:

- 1) Man nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls gelten

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

Mit $Z(D)$ wird die **Menge der Zerlegungen** von D bezeichnet.

Definition: (Fortsetzung)

2) Die **Feinheit** einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3) Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die **Teilquader** der Zerlegung Z . Das **Volumen** des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

4) Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

111

eine **Riemannsche Summe** zur Zerlegung Z .

Definition: (Fortsetzung)

5) Analog zum Integral einer Variablen heißen

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{x \in Q_{ij}} f(x) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{x \in Q_{ij}} f(x) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

die **Riemannsche Unter- bzw. Obersumme** der Funktion $f(x)$ zur Zerlegung Z .

Bemerkung:

Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter- und Obersumme dieser Zerlegung, d.h.

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

112

Bemerkung:

Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j , so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

Was passiert mit den Unter- und Obersummen im Grenzwert $\|Z\| \rightarrow 0$:

$$U_f := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

$$O_f := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter- und Obersumme geeignete Monotonieeigenschaften besitzen.

113

Definition:

- 1) **Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral** der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D :

$$\int_D^* f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

$$\int_D^* f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

- 2) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man **Riemann-integrierbar** über D , falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Das **Riemann-Integral** von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_D^* f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_D^* f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

114

Bemerkung:

Wir haben bis jetzt den Fall von **zwei** Variablen betrachtet:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \in \mathbb{R}^2$$

betrachtet.

In höheren Dimensionen $n > 2$ ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise für $n = 2$ und $n = 3$:

$$\int_D f(x, y)dxdy \quad \int_D f(x, y, z)dxdydz$$

oder auch

$$\iint_D f(x, y)dxdy \quad \iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

115

Satz:

1) **Linearität**

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

2) **Monotonie**

Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt:

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

3) **Positivität**

Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) \geq 0$, so folgt:

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0$$

116

Satz: (Fortsetzung)

4) Sind D_1, D_2 und D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(\mathbf{x})$ genau dann über D integrierbar, falls $f(\mathbf{x})$ über D_1 und D_2 integrierbar ist, und es gilt:

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

5) Es gilt folgende **Abschätzung** für das Integral

$$\left| \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x})| \cdot \text{vol}(D)$$

6) **Riemannsches Kriterium:**

$f(\mathbf{x})$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$$

117

Satz: (Satz von Fubini)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Quader, und existieren die Integrale

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \quad \text{bzw.} \quad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. $y \in [a_2, b_2]$, so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx \quad \text{bzw.}$$

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy$$

Bedeutung: Rückführung auf eindimensionale Integration möglich

118

Beispiel: Gegeben sei der Quader $D = [0, 1] \times [0, 2]$ sowie die Funktion

$$f(x, y) = 2 - xy$$

Stetige Funktionen sind über Quadern integrierbar (kommt gleich), daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned} \int_d f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2} \right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini verlangt als Voraussetzung die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht!**

119

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Wir setzen

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \text{ falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \text{ falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

Speziell für $f(\mathbf{x}) = 1$ heißt $f^*(\mathbf{x})$ die **charakteristische** Funktion von D . Diese wird mit $\mathcal{X}_D(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Sei nun Q der kleinste Quader mit $D \subset Q$. Dann definieren wir:

- 1) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **integrierbar** über D , falls $f^*(\mathbf{x})$ über Q integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

120

Definition: (Fortsetzung)

- 2) Die kompakte Menge heißt **messbar**, falls das Integral

$$\text{vol}(D) := \int_D 1 d\mathbf{x} = \int_Q \mathcal{X}_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

existiert.

Man nennt dann $\text{vol}(D)$ das **Volumen** von D .

Die kompakte Menge D heißt **Nullmenge**, falls D messbar ist und $\text{vol}(D) = 0$ gilt.

Bemerkung:

Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $Q = D$ und der Integrationsbegriff von oben stimmt mit dem vorhergehend diskutierten überein.

Das durch $\text{vol}(D)$ bezeichnete Volumen ist dann auch das tatsächliche Volumen des Quaders (im \mathbb{R}^n).

121

Wir fassen drei wichtige Eigenschaften der mehrdimensionalen Integration zusammen:

1) **Satz:**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist D genau dann messbar, falls der Rand ∂D von D eine Nullmenge ist.

2) **Satz:**

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(\mathbf{x})$ integrierbar über D .

3) **Mittelwertsatz:**

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, zusammenhängend und messbar und ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es einen Punkt $\xi \in D$ mit

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot \text{vol}(D)$$

122

Definition:

- 1) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein **Normalbereich**, falls es stetige Funktionen g, h bzw. \bar{g}, \bar{h} gibt mit

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

$$D = \{(x, y) : \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \wedge \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

- 2) Analog heißt eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ ein **Normalbereich**, falls es eine Darstellung

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : a \leq x_i \leq b \wedge g(x_i) \leq x_j \leq h(x_i) \\ \wedge \varphi(x_i, x_j) \leq x_k \leq \psi(x_i, x_j)\}$$

gibt mit einer Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ .

123

Definition: (Fortsetzung)

- 3) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in Richtung x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen φ, ψ gibt, so dass

$$D = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^T \in B \\ \wedge \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}}) \}$$

Bemerkung:

- 1) Projizierbare Mengen sind stets messbar. Damit sind auch alle Normalbereiche messbar, denn sie sind projizierbar.
- 2) Häufig läßt sich der Integrationsbereich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Bereich sind dann ebenfalls messbar.

124

Satz:

Ist $f(\mathbf{x})$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x) \}$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

Bemerkung:

Analoge Beziehungen gelten für höhere Dimensionen. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine projizierbare Menge, so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B \left(\int_{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})}^{\psi(\tilde{\mathbf{x}})} f(\mathbf{x}) dx_i \right) d\tilde{\mathbf{x}}$$

125

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := x + 2y$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

$$D := \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

Die Menge D ist ein Normalbereich und $f(x, y)$ ist stetig:

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} (x + 2y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{x^2}^{2-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x(2 - x^2) + (2 - x^2)^2 - x^3 - x^4) dx \end{aligned}$$

126

$$= \int_{-1}^1 (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4) dx = \frac{16}{3}$$

Beispiel: Zu berechnen ist das Volumen des Rotationsparaboloids:

$$V := \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Darstellung von V als **Normalbereich**

$$V := \{(x, y, z)^T :$$

$$-1 \leq x \leq 1 \wedge -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \wedge x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Damit gilt:

$$\text{vol}(V) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy dx$$

127

$$= \dots = \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Integration über allgemeine Integrationsbereiche

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und messbare Menge.

Man nennt $Z = \{D_1, \dots, D_m\}$ eine **allgemeine Zerlegung** von D , falls die Mengen D_k kompakt, messbar und zusammenhängend sind und

$$\bigcup_{j=1}^m D_j = D \quad \text{und} \quad \forall i \neq j : D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset$$

gelten.

Ferner heißt

$$\text{diam } D_j := \sup \{ \|x - y\| : x, y \in D \}$$

der **Durchmesser** der Menge D_j und

$$\|Z\| := \max \{ \text{diam } D_j : j = 1, \dots, m \}$$

die **Feinheit** der allgemeinen Zerlegung Z .

128

Riemannsche Summe für allgemeine Zerlegungen:

Für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man die Riemannschen Summen

$$R_f(Z) = \sum_{j=1}^m f(x^j) \text{vol}(D_j)$$

mit beliebigen $x^j \in D_j, j = 1, \dots, m$.

Satz:

Für jede Folge $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ allgemeiner Zerlegungen von D mit $\|Z_k\| \rightarrow 0$ (für $k \rightarrow \infty$) und für jede Folge zugehöriger Riemannscher Summen $R_f(Z_k)$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_f(Z_k) = \int_D f(x) dx$$

129

Anwendungen der Bereichsintegrale auf die Berechnung von Schwerpunkten oder Trägheitsmomenten von Flächen und Körpern.

A) Schwerpunkt einer Fläche oder eines Körpers:

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. \mathbb{R}^3) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der Schwerpunkt der Fläche (bzw. des Körpers) D gegeben durch

$$\mathbf{x}_s := \frac{\int_D \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}}{\int_D \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

Das Zählerintegral (über eine vektorwertige Funktion) ist hierbei koordinatenweise zu berechnen.

130

Beispiel: Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide P :

$$P := \left\{ (x, y, z)^T : \max(|y|, |z|) \leq \frac{ax}{2h}, \quad 0 \leq x \leq h \right\}$$

Unter der Annahme konstanter Dichte berechnen wir das Volumen von P :

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz dy dx \\ &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h} dy dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h} \right)^2 dx = \frac{1}{3} a^2 h \end{aligned}$$

131

Beispiel: (Fortsetzung)

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dz dy dx &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} \frac{ax^2}{h} \\ \frac{axy}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dy dx \\ &= \int_0^h \begin{pmatrix} \frac{a^2x^3}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a^2h^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von P liegt daher im Punkt $\mathbf{x}_s = (\frac{3}{4}h, 0, 0)^T$.

132

B) Trägheitsmomente von Flächen oder Körpern:

Definition: (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. \mathbb{R}^3) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$ bezeichne für $\mathbf{x} \in D$ eine Massendichte und $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punktes $\mathbf{x} \in D$ von einer vorgegebenen Drehachse.

Dann besitzt D bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{Achse}} := \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Beispiel: Gegeben sei der homogene Zylinder Z :

$$Z := \left\{ (x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq r^2, -l/2 \leq z \leq l/2 \right\}$$

Wir berechnen das Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse:

$$\Theta_{x\text{-Achse}} = \int_Z \rho(y^2 + z^2) d(x, y, z)$$

133

unter der Annahme konstanter Dichte ρ .

Beispiel: (Fortsetzung)

Es gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_{x\text{-Achse}} &= \rho \int_Z (y^2 + z^2) d(x, y, z) \\ &= \rho \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= \rho \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(ly^2 + \frac{l^3}{12} \right) dy dx \\ &= \rho \frac{\pi lr^2}{12} (3r^2 + l^2)\end{aligned}$$

Transformationssatz:

Dies verallgemeinert die Substitutionsregel aus Analysis II

Satz:

Sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. $D \subset U$ sei eine

kompakte, messbare Menge, so dass Φ auf D^0 einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus bildet.

Dann ist auch $\Phi(D)$ kompakt und messbar, und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u})) |\det \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})| d\mathbf{u}$$

Bemerkung:

Man beachte, dass im Transformationssatz die Bijektivität von Φ nur

auf dem inneren Bereich D^0 gefordert wird – nicht jedoch auf dem Rand!

Bespiel: Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten:

$$V = \{(x, y, z)^T : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x, y, z \geq 0\}$$

Hier ist es einfacher den Schwerpunkt in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \psi \\ r \sin \varphi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Die Transformation ist auf ganz \mathbb{R}^3 definiert und mit

$$D = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt $\Phi(D) = V$.

Weiter ist Φ auf der offenen Menge D^0 ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus

und

$$\det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos \psi$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Nach dem Transformationssatz folgt

$$\text{vol}(V) = \int_V dx = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr = \frac{\pi}{6}$$

und

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) \cdot x_s &= \int_V x dx = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi \cos \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \\ &= \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Daraus folgt $x_s = \frac{3}{8}$.

Analog berechnet man $y_s = z_s = \frac{3}{8}$.

137

Beispiel: Der Steinersche Satz

Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S$$

Hierbei ist S die zu A parallele Achse durch den Schwerpunkt \mathbf{x}_s des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes \mathbf{x}_s von der Achse A .

Idee zur Herleitung: Setze $\mathbf{x} := \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_s + \mathbf{u}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \rho \int_K (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle^2) dx \\ &= \rho \int_D (\langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{x}_s + \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle^2) dx \end{aligned}$$

138

wobei

$$D := \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s : \mathbf{x} \in K\}$$

3.2 Kurvenintegrale

Für eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und eine stetige, skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir das **Kurvenintegral 1. Art** definiert durch

$$\int_c f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

Erweiterung auf Kurvenintegrale über vektorwertige Funktionen, d.h.

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := ?$$

Anwendung und Interpretation:

Ein Massenpunkt bewegt sich entlang $\mathbf{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Welche **Arbeit** muss entlang der Kurve geleistet werden?

Definition: Für ein stetiges Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow D$ definieren wir das **Kurvenintegral 2. Art** durch

$$\int_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_a^b \langle f(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt$$

Herleitung:

Approximiere die Kurve durch einen Streckenzug mit Ecken $\mathbf{c}(t_i)$, wobei

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist.

Dann gilt für die in einem Kraftfeld $f(\mathbf{x})$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$

140

geleistete Arbeit die Näherungsformel:

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle f(\mathbf{c}(t_i)), \mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i) \rangle$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))(c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i)) \dot{c}_j(\tau_{ij})(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \rightarrow 0$ konvergiert die linke Seite gegen das oben definierte **Kurvenintegral 2. Art**.

Bemerkung:

Für eine geschlossene Kurve $c(t)$, d.h. $c(a) = c(b)$, schreibt man das Kurvenintegral auch als

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art:

1) **Linearität:**

$$\int_c (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \alpha \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \beta \int_c \mathbf{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

2) Es gilt:

$$\int_{-c} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

wobei $(-c)(t) := c(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$

3) Es gilt:

$$\int_{c_1+c_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{c_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{c_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

wobei der Endpunkt von c_1 der Anfangspunkt von c_2 ist.

4) Das Kurvenintegral 2. Art ist **parametrisierungsinvariant**.

5) Es gilt:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{T}(t) \rangle \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle ds$$

mit dem **Tangenten-Einheitsvektor** $\mathbf{T}(t) := \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$.

6) Formale Schreibweise:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_c \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) dx_i = \sum_{i=1}^n \int_c f_i(\mathbf{x}) dx_i$$

mit

$$\int_c f_i(\mathbf{x}) dx_i := \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_i(t) dt$$

143

Beispiel: Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (-y, x, z^2)^T$$

$$\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t, at)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_c (-ydx + xdy + z^2dz) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + a^2 t^2 a) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + a^3 t^2) dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3} (2\pi)^3 \end{aligned}$$

144

Definition: Ist $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral $\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ entlang einer geschlossenen Kurve auch die **Zirkulation** des Feldes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Beispiel:

Für das Feld $\mathbf{u}(x, y) = (y, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (r \cos t, 1 + r \sin t)^T, 0 \leq t \leq 2\pi$ die Zirkulation

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r \sin t)(-r \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r \sin t - r^2 \sin^2 t) dt \\ &= \left[r \cos t - \frac{r^2}{2}(t - \sin t \cos t) \right]_0^{2\pi} = -\pi r^2 \end{aligned}$$

145

Definition:

Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **wirbelfrei**, falls dessen Kurvenintegral längs **aller** geschlossenen, stückweise C^1 -Kurven $\mathbf{c}(t)$ in D verschwindet, d.h.

$$\forall \mathbf{c} \quad : \quad \oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Bemerkung: Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve \mathbf{c} abhängt.

Man sagt: das Kurvenintegral ist **wegunabhängig**.

Frage:

Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **garantieren** die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

146

Definition:

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise C^1 -Kurve verbunden werden können:

$$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 \in D : \exists c : [a, b] \rightarrow D \quad : \quad c(a) = \mathbf{x}^0 \wedge c(b) = \mathbf{y}^0$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein **Gebiet** in \mathbb{R}^n .

Bemerkung:

Eine **offene** Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **nicht** zusammenhängend, wenn es **disjunkte**, offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$U_1 \cap D \neq \emptyset, \quad U_2 \cap D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cup U_2$$

Nicht zusammenhängende offene Mengen sind also – im Gegensatz zu zusammenhängende Mengen – in (zumindest) zwei disjunkte offene Bereiche trennbar.

Definition:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld nennt man ein **Gradientenfeld**, falls es eine skalare C^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$$

Die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ heißt dann **Stammfunktion** oder **Potential** von $f(\mathbf{x})$.

Bemerkung:

Ein Massenpunkt bewege sich in einem **konservativen** Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x})$,

d.h. \mathbf{K} besitzt ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$.

Dann ist $U(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ gerade die **potentielle Energie**:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x})$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathbf{x}}$, so folgt:

$$m\langle\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\rangle + \langle\nabla U(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}\rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x}) \right) = 0$$

Hauptsatz für Kurvenintegrale:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f(\mathbf{x})$ ein stetiges Vektorfeld auf D .

- 1) Besitzt $f(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so gilt für alle stückweisen C^1 -Kurven $c : [a, b] \rightarrow D$:

$$\int_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $f(\mathbf{x})$ ist wirbelfrei.

- 2) Umgekehrt gilt: Ist $f(\mathbf{x})$ wirbelfrei, so besitzt $f(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein fester Punkt, und bezeichnet c_x (für $\mathbf{x} \in D$) eine beliebige, die Punkte \mathbf{x}^0 und \mathbf{x} verbindende stückweise

C^1 -Kurve in D , so ist $\varphi(\mathbf{x})$ gegeben durch:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{c_x} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + c, \quad c = \text{const.}$$

Beispiel:

Das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

besitzt das Potential

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$$

Denn es gilt:

$$\nabla U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} (x, y, z)^T = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen C^1 -Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geleistete Arbeit gilt dann:

$$A = \int_c \mathbf{K}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\|c(a)\|} - \frac{1}{\|c(b)\|} \right)$$

150

Beispiel:

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz$$

Für eine beliebige, die Punkte $P = (1, 1, 2)$ und $Q = (3, 5, -2)$ verbindende C^1 -Kurve $c(t)$ gilt also:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(Q) - \varphi(P) = -9 - 15 = -24$$

Interpretiert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als elektrisches Feld, so gibt das Kurvenintegral 2. Art die Spannung zwischen den beiden Punkten P und Q an.

151

Beispiel: Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x, y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, findet man:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \end{aligned}$$

152

$\mathbf{f}(x, y)$ ist also nicht wirbelfrei und besitzt folglich auf D auch kein Potential.

Bemerkung:

Ist $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, ein C^1 -Vektorfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so folgt:

$$\operatorname{rot} f(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} (\nabla \varphi(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

Daraus folgt, dass $\operatorname{rot} f(\mathbf{x}) = 0$ eine **notwendige Bedingung** für die Existenz eines Potentials ist.

Definiert man für ein Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, die **skalare Rotation**

$$\operatorname{rot} f(x, y) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$$

so ist $\operatorname{rot} f(x, y) = 0$ auch in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung.

Die Bedingung

$$\operatorname{rot} f(\mathbf{x}) = 0$$

ist eine **hinreichende Bedingung**, falls das Gebiet D **einfach zusammenhängend** ist, d.h. keine "Löcher" enthält.

Beispiel:

Wir betrachten wieder das Vektorfeld

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x, y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left[\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Rotation von $f(x, y)$ verschwindet zwar, aber $f(x, y)$ besitzt auf der

Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kein Potential.

Das Gebiet ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend.

154

Satz: (Integralsatz von Green)

Sei $f(x)$ ein C^1 -Vektorfeld auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. $K \subset D$ sei kompakt und bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar. K wird dann von einer geschlossenen, stückweisen C^1 -Kurve $c(t)$ berandet.

Die Parametrisierung sei so gewählt, dass K stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf).

Dann gilt:

$$\oint_c f(x) dx = \int_K \operatorname{rot} f(x) dx$$

Bemerkung:

Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche, die sich in endlich viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbarer Bereiche zerlegen lassen, in so genannte **Greensche Bereiche**.

155

Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green:

Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle ds$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

Daraus folgt aber mit dem Integralsatz von Green

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch \mathbf{f} beschriebene Strömung unter der Bedingung $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

156

Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green II:

Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor \mathbf{T} durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle ds &= \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) ds = \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle ds \\ &= \int_K \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_K \operatorname{div} \mathbf{f} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

und damit die Beziehung

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle ds$$

Die rechte Seite beschreibt den **Gesamtfluss** der Strömung durch den Rand von K . Gilt also $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, so ist die Strömung **quellen- und senkenfrei**.

157

Folgerung: Ist $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, so folgt

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

für jede geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve, die einen Greenschen Bereich $B \subset D$ vollständig umrandet.

Definition:

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jede geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow D$ stetig innerhalb D auf einen Punkt in D zusammenziehen lässt, d.h. genauer:

Es gibt eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$$

mit $\Phi(t, 0) = c(t)$, $\forall t \in [a, b]$ und $\Phi(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D$, $\forall t \in [a, b]$.

Die Abbildung $\Phi(t, s)$ heißt auch **Homotopie**.

158

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf D , falls die **Integrabilitätsbedingung**

$$\forall \mathbf{x} \in D : \mathbf{J} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J} \mathbf{f}(\mathbf{x}))^T$$

erfüllt ist.

Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad \forall j, k$$

Bemerkung:

In den Fällen $n = 2, 3$ stimmt die Integrabilitätsbedingung mit der Bedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

159

überein.

Beispiel:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{r^2} + \sin z \\ \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos z \end{pmatrix}, \quad r^2 := x^2 + y^2 + z^2$$

gegeben.

Wir wollen untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt und dieses gegebenenfalls bestimmen.

Die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist offensichtlich **einfach zusammenhängend**.

Weiter gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

Also besitzt $f(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials:

Es muss gelten: $f(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Demnach folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1 = \frac{2xy}{r^2} + \sin z$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x ergibt sich:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + c(y, z)$$

mit einer unbekanntenen Funktion $c(y, z)$.

Einsetzen in die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f_2 = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

liefert

$$\ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = ze^y$$

und es gilt

$$c(y, z) = ze^y + d(z)$$

Wir haben damit:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + d(z)$$

mit der noch unbekanntem Funktion $d(z)$.

Die letzte Bedingung lautet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos z$$

Daraus folgt $d'(z) = 0$ und das Potential ist gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

162

3.3 Oberflächenintegrale

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in D\}$$

eine **Fläche** bzw. ein **Flächenstück**.

Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nennt man eine **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** der Fläche F .

163

Beispiel:

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im \mathbb{R}^3 .

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H .

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit linear unabhängig auf ganz \mathbb{R}^2 .

Beispiel:

Der Graph einer skalaren C^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.

165

Tangentialebene:

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen **tangential** an die Fläche F .

Sie spannen die **Tangentialebene** $T_{\mathbf{x}^0}F$ an die Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$T_{\mathbf{x}^0}F : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Frage:

Wie kann ich den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

166

Definition:

Sei $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend.

Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das

Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{p}(K)} do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| du$$

Dabei nennt man den Term

$$do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| du$$

auch das **Oberflächenelement** der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$.

Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationssatz.

167

Beispiel:

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man wegen

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z do = \int_K r d(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dz d\varphi = 2\pi r H$$

168

Beispiel:

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

und

$$O(\mathbf{p}(K)) = \int_{\mathbf{p}(K)} do$$

$$= \int_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2} d(x_1, x_2)$$

Beispiel:

Wir berechnen die Oberfläche des Paraboloids P gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} O(P) &= \int_{x_1^2+x_2^2 \leq 2} \sqrt{1+4x_1^2+x_2^2} d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2} r d\varphi dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1+4s} ds \\ &= \pi \left[\frac{1}{6}(1+4s)^{3/2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{6}(27-1) \right) = \frac{13}{3}\pi \end{aligned}$$

170

Bemerkung:

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2} d(u_1, u_2)$$

171

Beispiel:

Für das Oberflächenelement der Kugel

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$E = r^2 \cos^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

172

Beispiel: (Fortsetzung)

Aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2} d(u_1, u_2)$$

folgt daher

$$do = r^2 \cos \theta d(\varphi, \theta), \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wir können nun die Oberfläche der Kugel berechnen:

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

173

Definition:

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine \mathcal{C}^1 -Parametrisierung einer Fläche $F = \mathbf{p}(K)$, $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend.

- 1) Für eine stetige Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das **Oberflächenintegral 1. Art** durch

$$\int_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u}$$

- 2) Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert man das **Oberflächenintegral 2. Art** durch

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle \, d\mathbf{u}$$

174

Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle \, d\mathbf{u} \\ &= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u} \end{aligned}$$

175

$$= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma$$

Bemerkung:

1) **Physikalische Interpretation der Oberflächenintegrale:**

Ist $\rho(\mathbf{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Integral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Integral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den **Fluss** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch die Fläche F .

- 2) Ist F eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberflächen eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im \mathbb{R}^3 , so schreiben wir wiederum

$$\oint_F f(\mathbf{x}) d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\sigma$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nach außen weist.

Satz: (Integralsatz von Gauß)

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h. G sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dann ein C^1 -Vektorfeld mit $G \subset D$, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}$$

Interpretation:

Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer **inkompressiblen** Strömung, so gilt $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ und daher

$$\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = 0$$

Beispiel:

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und die Kugel K :

$$K := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3$$

und damit

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 3 \cdot \operatorname{vol}(K) = 4\pi$$

Das entsprechende Oberflächenintegral lässt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. die Parametrisierung der Kugel durch Kugelkoordinaten, berechnen.

178

Satz: (Formeln von Green)

Die Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für \mathcal{C}^2 -Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, do \\ \int_G (f \Delta g - g \Delta f) \, d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \, do \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

179

Beweis: Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\mathbf{x} &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g .

180

Satz: (Integralsatz von Stokes)

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$. Weiter sei $F = \mathbf{p}(K)$ eine Fläche in D , $F \subset D$, mit der Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.

$K \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Greenscher Bereich. Der Rand ∂K werde durch eine stückweise glatte \mathcal{C}^1 -Kurve c parametrisiert, deren Bild $\tilde{c}(t) := \mathbf{p}(c(t))$ dann den Rand ∂F der Fläche F parametrisiert.

Die Orientierung der Randkurve $\tilde{c}(t)$ sei hierbei so gewählt, dass $\mathbf{n}(\tilde{c}(t)) \times \dot{\tilde{c}}(t)$ in Richtung der Fläche weist.

Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\sigma = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

181

Beispiel:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

und die geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \end{aligned}$$

182

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Wir definieren nun eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $c(t)$ berandet wird:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi, \psi)$$

mit $(\varphi, \psi) \in K = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, d.h. die Fläche F ist gerade die obere Kugelhälfte.

Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \oint_{c=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{c=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 2\pi$$

183

Beispiel: (Fortsetzung)

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art**:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \int_K \left\langle \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi, \psi)), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} \right\rangle d\varphi d\psi$$

Beachte: Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man berechnet direkt, dass $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0, 0, 2)^T$ gilt und

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \psi \\ \sin \varphi \cos^2 \psi \\ \sin \psi \cos \psi \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \sin \psi \cos \psi \, d\varphi d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\psi) \, d\psi = 2\pi$$

184