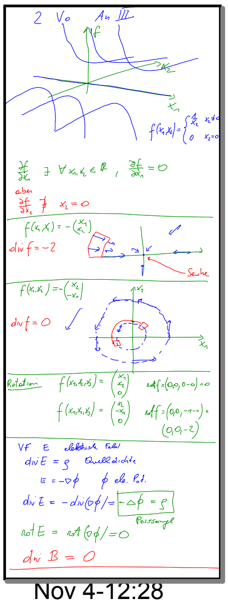


Nov 4-12:28

1.2 Das vollständige Differential

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i.a. kein VF

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar** in x^0 (oder **vollständig** bzw. **total differenzierbar**), falls es eine lineare Abbildung

$$l(x, x^0) := A \cdot (x - x^0)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$f(x) = f(x^0) + A \cdot (x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$$

d.h.

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0$$

Def $o($

erfüllt ist.

24

1dim: $n = m = 1$ a 1×1 Matrix

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{a}(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

Nov 4-13:22

ANALYSISIII.pdf - Adobe Reader

Bemerkung:
Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g$$
$$\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi, f) + \varphi \operatorname{div} f$$

Bemerkung:
Ist $f: D \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion, so gilt für den Laplace–Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition:
Für partiell differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, $f: D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} f(x^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^T \Big|_{x^0}$$

22

Nov 4-13:05

Andere **Notationen:**

$$\operatorname{rot} f(x) = \nabla \times f(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = e_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) - e_2\left(\quad\right) + e_3\left(\quad\right)$$

Bemerkung:
Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g$$
$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$$

α, β Konst, $\varphi = \varphi(x)$

Bemerkung: φ skalar, f VF

Ist $\varphi: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine C^2–Funktion, so folgt aufgrund des Vertauschbarkeitssatzes von Schwarz

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0,$$

d.h. Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

23

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} & & \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 \varphi & \partial_2 \varphi & \partial_3 \varphi \end{vmatrix} = e_1(\underbrace{\partial_2 \partial_3 \varphi - \partial_3 \partial_2 \varphi}_{=0 \text{ weil } \varphi \in C^2}) + \dots = 0$$

Nov 4-13:11

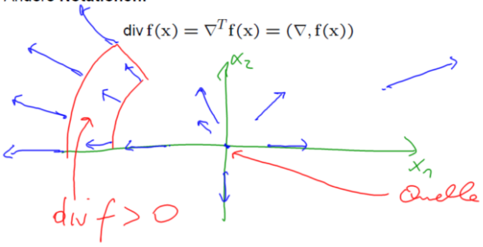
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right), \quad f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Divergenz $\equiv$ Quellstärke

Bsp: $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{div} f = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 2$

Andere **Notationen:**

$$\operatorname{div} f(x) = \nabla^T f(x) = (\nabla, f(x))$$



Nov 4-12:54

$$\operatorname{div}(\varphi f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi f_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i = \varphi \operatorname{div} f + \nabla \varphi \cdot f$$

Bemerkung:
Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g$$
$$\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi, f) + \varphi \operatorname{div} f$$

Bemerkung:
Ist $f: D \to \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion, so gilt für den Laplace–Operator

Laplace $\quad \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$

Definition:
Für partiell differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, $f: D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch Wirbelstärke

$$\operatorname{rot} f(x^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^T \Big|_{x^0}$$

"2dimensional"

22

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} f = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

Nov 4-13:01

Totale Diffbk.

$$n=2,\ m=1$$

$$f(x_1,x_2) = f(x_{10},x_{20}) + \underbrace{(a_1, a_2)}_{1\times 2}\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20}\end{pmatrix} + o(\quad)$$

$x_2 = x_{20}$

$$f(x_1,x_{20}) = f(x_{10},x_{20}) + (a_1, a_2)\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ 0\end{pmatrix} + o(\quad)$$

$$= f(x_{10},x_{20}) + a_1 (x_1 - x_{10}) + o(\quad)$$

$$= f(x_{10},x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10},x_{20})(x_1 - x_{10}) + o(\quad)$$

analog $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10},x_{20})$

Nov 4-12:37

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

$$(*) = \lim \frac{\| \quad \cdot / \cdot \quad \|}{\|x-x_0\|}\|x-x_0\| = \underbrace{\lim \frac{\| \quad \cdot / \cdot \quad \|}{\|x-x_0\|}}_{=0} \underbrace{\lim \|x-x_0\|}_{=0} =$$

Beweis von a):

Ist f in x^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A\cdot(x-x^0)}{\|x-x^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber $(*)$

$$\lim_{x\to x^0} \|f(x) - f(x^0) - A\cdot(x-x^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\|f(x) - f(x^0)\| \le \|f(x) - f(x^0) - A\cdot(x-x^0)\| + \|A\cdot(x-x^0)\|$$
$$\to 0 \quad \text{für } x \to x^0$$

Damit ist die Funktion f stetig im Punkt x^0.

$$\|A(x-x_0)\| \le \underbrace{\|A\|}_{K<\infty}\|x-x_0\| \to 0$$

27

Nov 4-13:35

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

a) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist $f(x)$ auch stetig in x^0.

b) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist das Differential und damit auch die Jacobi–Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$J f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(x^0) \\ \vdots \\ Df_m(x^0)\end{pmatrix}$$

falls f VF ($n=m$) $\Rightarrow A$ quadratisch

c) Ist $f(x)$ eine C^1–Funktion auf D, so ist $f(x)$ auf D (vollständig) differenzierbar.

Bemerkung:

Man beachte, dass **differenzierbar** hier **vollständig/total** differenzierbar bedeutet.

26

Nov 4-13:38

Beweis von b):

Sei $x = x^0 + te_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Da f im Punkt x^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A\cdot(x-x^0)}{\|x-x^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\frac{f(x) - f(x^0) - A\cdot(x-x^0)}{\|x-x^0\|_\infty} = \frac{f(x^0+te_i) - f(x^0)}{|t|} - \frac{tAe_i}{|t|}$$
$$= \frac{t}{|t|}\cdot\left(\frac{f(x^0+te_i) - f(x^0)}{t} - Ae_i\right)$$
$$\to 0 \quad (t \to 0)$$

$$\left|\frac{t}{|t|}\right| \le 1$$

28

Nov 4-13:41

Daraus folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+te_i) - f(x^0)}{t} = Ae_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

i-te Spalte von A

Nov 4-13:43

Beispiel: $n=2 \quad m=1$

a) Betrachte die skalare Funktion $f(x_1,x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi–Matrix:

$$Jf(x_1,x_2) = Df(x_1,x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1) \qquad 1\times 2$$

b) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\quad n=3,\ m=2$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3)\end{pmatrix}$$

Die Jacobi–Matrix ergibt sich in der Form $\quad 2\times 3$

$$Jf(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ \cos s & 2\cos s & 3\cos s\end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

29

Nov 4-13:46

Beispiele:

c) Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\underline{Jf(x) = A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

d) Sei $f(x) = x^T A x = \langle x, Ax \rangle$, $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \langle e_i, Ax \rangle + \langle x, Ae_i \rangle = e_i^T Ax + x^T Ae_i = x^T (A^T + A) e_i$$

$\frac{\partial}{\partial x_i} x = e_i$

$e_i^T A x = (e_i^T A x)^T$ weil skalar

$x^T A^T e_i$

Daraus folgt

$$Jf(x) = Df(x) = x^T (A^T + A)$$

falls $A = A^T$ $\quad Jf(x) = 2x^T A$

30

Nov 4-13:50

Satz: (Differentiationsregeln)

1) **Linearität** Sind $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha f(x^0) + \beta g(x^0)$, α, β reell, differenzierbar in x^0 und es gilt

$$d(\alpha f + \beta g)(x^0) = \alpha\, df(x^0) + \beta\, dg(x^0)$$
$$J(\alpha f + \beta g)(x^0) = \alpha\, Jf(x^0) + \beta\, Jg(x^0)$$

2) **Kettenregel** Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$, D offen, und ist $g : E \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $y^0 = f(x^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in x^0 differenzierbar.
Für die Differentiale gilt

$$d(g \circ f)(x^0) = dg(y^0) \circ df(x^0)$$

und analog für die Jacobi–Matrizen

$$J(g \circ f)(x^0) = \underbrace{\underbrace{Jg(y^0)}_{k \times m} \cdot \underbrace{Jf(x^0)}_{m \times n}}_{k \times n}$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$(g \circ f): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

31

Nov 4-13:54

Beispiel: (zur Kettenregel)

Sei $h : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $x^0 = h(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.
Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$\boxed{(f \circ h)(t) = f(h_1(t), \ldots, h_n(t))}$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\boxed{(f \circ h)'(t_0)} = \underbrace{Jf(h(t_0))}^{1 \times n} \cdot \underbrace{Jh(t_0)}^{n \times 1} = Df(h(t_0)) \cdot h'(t_0) = \overset{1 \times 1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(h(t_0)) \cdot h_k(t_0)}$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$f \circ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

32

Nov 4-13:56