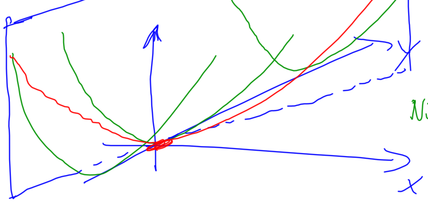
An III 2.12.09

Extrema unter Nebenbed.



$f(x,y) = x^2$

NB: $g(x,y) = y - 2x = 0$

Dez 2-12:15

$f(x,y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ $n = 2$

$g(x,y) = \pi x^2 y - c = 0$ $m = 1$

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$$\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} 4\pi x + 2\pi y + 2\lambda\pi xy \\ 2\pi x + \lambda \pi x^2 \\ \pi x^2 y - c \end{pmatrix}^T \overset{!}{=} 0^T$$

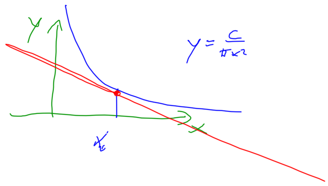
$\Rightarrow x(2 + \lambda x) = 0$ $\quad \cancel{x = 0}$ $(g(x,y) \neq 0)$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{x}$

$0 = 2x + y + \lambda xy = 2x + y - \frac{2}{x}xy = 2x - y = 0$

$y = 2x$

$2\pi x^2 x = c \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{c}{2\pi}}$

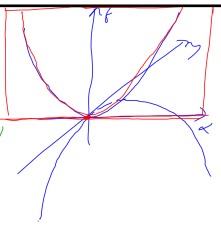


$y = \frac{c}{\pi x^2}$

Dez 2-12:38

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$g(x,y) = y = 0$



$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$$\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y + \lambda \end{pmatrix}^T \overset{!}{=} 0^T$$

$x = 0$
$y = 0$
$\lambda = 0$

$$HF = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

TG: $\operatorname{grad} g(x) \cdot y = 0 = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2$

TG: $\boxed{y = 0}$

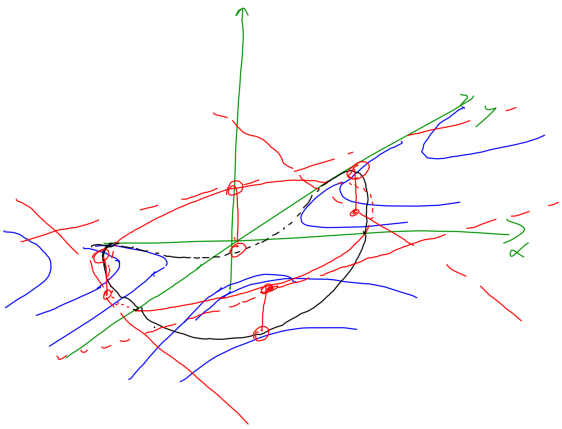
Elemente in TG $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (a,0)\, HF(0,0) \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = (a,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = 2a^2 \geq 0$$

$= 2a^2 > 0 \quad a \neq 0$

$\Rightarrow$ strng. lok. Minimum

Dez 2-12:47



Dez 2-12:53

Beispiel: Man bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y,z) = 2x + 3y + 2z \qquad n = 3$$

auf dem Durchschnitt des Zylinders

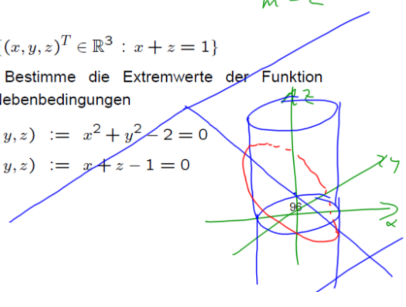
$$Z := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2\}$$

mit der Ebene $\qquad m = 2$

$$E := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1\}$$

Umformulierung: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x,y,z)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &:= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x,y,z) &:= x + z - 1 = 0 \end{aligned}$$



96

Dez 2-13:31

Beispiel: (Fortsetzung)

Die Jacobi–Matrix $\qquad 2\times 3$

$$\mathrm{Jg}(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Rg } Jg = 2 \text{?}$$

hat den Rang 2, d.h. wir können über die Lagrange–Funktion Extremwerte bestimmen:

$$F(x,y,z) = 2x + 3y + 2z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\operatorname{grad} F = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\ 3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\ 2 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

97

Dez 2-13:33

Beispiel: (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} 2+2\lambda_1 x+\lambda_2 &= 0 \\ 3+2\lambda_1 y &= 0 \\ 2+\lambda_2 &= 0 \\ x^2+y^2 &= 2 \\ x+z &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2\lambda_1 x = 0$, $x = 0$

$\lambda_1 \neq 0$

$y = \pm\sqrt{2}$

$z = 1$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$2\lambda_1 x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $x = 0$.
Damit ergeben sich die möglichen Extremwerte als

$$(x,y,z) = (0,\sqrt{2},1) \quad (x,y,z) = (0,-\sqrt{2},1)$$

98

Dez 2-13:35

Bemerkung:

1) **Notwendige Bedingung zweiter Ordnung**

Ist $\mathrm{x}^0 \in D$ ein lokales Minimum von $f(\mathrm{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0$, ist die Regularitätsbedingung erfüllt und sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ zugehörige Lagrange–Multiplikatoren, so ist die Hesse–Matrix $\mathrm{H}F(\mathrm{x}^0)$ der Lagrange–Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum

$$TG(\mathrm{x}^0) := \{\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{grad} g_i(\mathrm{x}^0)\cdot\mathrm{y} = 0,\ i = 1,\ldots,m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathrm{y}^T\, \mathrm{H}F(\mathrm{x}^0)\, \mathrm{y} \geq 0 \quad \forall \mathrm{y} \in TG(\mathrm{x}^0)$$

92

Dez 2-13:11

Beispiel: (Fortsetzung)

Die Hesse–Matrix im Punkt $\mathrm{x}^0 = 0$ lautet

$$\mathrm{H}f(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und ist **indefinit**. Daher ist x^0 ein **Sattelpunkt**.

Die Extrema der Funktion müssen also auf dem Rand liegen, der ein Gleichungsnebenbedingung darstellt:

$$g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$$

$n = 2$
$m = 1$

Wir suchen also die Extremwerte von $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Die Lagrange–Funktion lautet

$$F(x,y) = xy + \lambda(x^2+y^2-1)$$

Dez 2-12:58

$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$

Die Lagrange–Funktion:

Wir definieren folgende erweiterte Funktion $F(\mathrm{x})$:

$$F(\mathrm{x}) := f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathrm{x}) = f(x) + \lambda^T \cdot g(x)$$

und suchen die Extremwerte von $F(\mathrm{x})$ für festes $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^T$.

Die Zahlen λ_i, $i = 1,\ldots,m$ nennt man **Lagrange–Multiplikatoren**.

Satz: (Lagrange–Lemma)

Minimiert (bzw. maximiert) x^0 die Lagrange–Funktion $F(\mathrm{x})$ (für ein festes λ) über D und gilt $\mathrm{g}(\mathrm{x}^0) = 0$, so liefert x^0 zugleich das Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathrm{x})$ über $G := \{\mathrm{x} \in D : \mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0\}$.

Beweis: Für ein beliebiges $\mathrm{x} \in D$ gilt nach Voraussetzung

$$F(x^0) = f(\mathrm{x}^0) + \lambda^T \underbrace{\mathrm{g}(\mathrm{x}^0)}_{=0} \leq f(\mathrm{x}) + \lambda^T \underbrace{\mathrm{g}(\mathrm{x})}_{=0} = F(x)$$

85

$$\Rightarrow f(x^0) \leq f(x)$$

Dez 2-12:36

Bemerkung:

Sind f und g_i, $i = 1,\ldots,m$, C^1–Funktionen, so ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle x^0 von $F(\mathrm{x})$ gegeben durch

$$\operatorname{grad} F(x) = \operatorname{grad} f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(\mathrm{x}) = 0^T \qquad n \text{ Gl}$$

m Gl

Zusammen mit den Nebenbedinungen $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 0$ ergibt sich ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit $(n+m)$ Gleichungen und $(n+m)$ Unbekannten x und λ.

Die Lösungen $(\mathrm{x}^0, \lambda^0)$ sind die Kandidaten für die gesuchten Extremstellen (**Notwendige Bedingung**).

Alternativ: Definiere eine Langrange–Funktion

$$G(\mathrm{x},\lambda) := f(\mathrm{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathrm{x})$$

und suche die Extremstellen von $G(\mathrm{x},\lambda)$ bezüglich x **und** λ.

86

Dez 2-12:38