Vo An III 13.1.10

Integral in $\mathbb{R}^n$

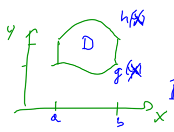
Quader

Normalbereiche

Vereinigung v. Normalbereichen

Trafosatz

$$\int_{D\subset\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$



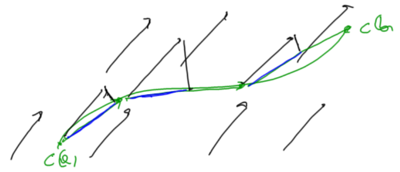
$$\int_D f\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Jan 13-12:36

$$\int_a^b \langle f(c(t)), \dot c(t)\rangle\,dt$$

geleistete Arbeit die Näherungsformel:

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle f(c(t_i)), \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{\Delta t}\rangle \;\Delta t$$



Jan 13-12:58

Daraus folgt:

$$A \approx \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} f_j(c(t_i))(c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i))$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m-1} f_j(c(t_i))\dot c_j(\tau_{ij})(t_{i+1} - t_i)$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \to 0$ konvergiert die linke Seite gegen das oben definierte **Kurvenintegral 2. Art**.

Bemerkung:

Für eine geschlossene Kurve $c(t)$, d.h. $c(a) = c(b)$, schreibt man das Kurvenintegral auch als

$$\oint_c f(x)\,dx$$

141

Jan 13-13:02

Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art:

1) **Linearität:**

$$\int_c (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_c f(x)\,dx + \beta \int_c g(x)\,dx$$

2) Es gilt:

$$\int_{-c} f(x)\,dx = -\int_c f(x)\,dx$$

wobei $(-c)(t) := c(b + a - t),\ a \le t \le b$

$t: a \to b$
$c(t): c(a) \to c(b)$
$(-c)(t): c(b) \to c(a)$

3) Es gilt:

$$\int_{c_1+c_2} f(x)\,dx = \int_{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_2} f(x)\,dx$$

wobei der Endpunkt von c_1 der Anfangspunkt von c_2 ist.

142

Jan 13-13:05

$$\int_a^b \langle f(c(t)), \dot c(t)\rangle\,dt = \int_{\gamma^{-1}(a)}^{\gamma^{-1}(b)} \langle f(c(\gamma(s))), \frac{d}{dt} c(\gamma(s))\rangle \cdot \frac{dt}{ds}\,ds =$$

$t = \gamma(s)$

$$\frac{d}{ds} c(\gamma(s))$$

$$\int_{\gamma^{-1}(a)}^{\gamma^{-1}(b)} \langle f(c(\gamma(s))), c'(\gamma(s))\rangle\,ds$$

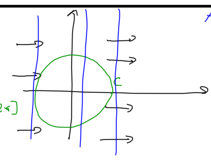
$$(\;)' = \frac{d}{ds}$$

Jan 13-13:06

$f = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \nabla x$

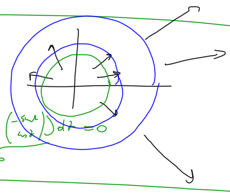
$c(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

$\dot c(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$



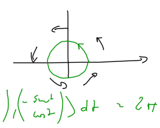
$$\int_c f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \langle f, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\rangle dt = -\int_0^{2\pi} \sin t\,dt = 0$$

$f = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \nabla \frac{x^2+y^2}{2}$



$$\int_c f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \langle \underbrace{\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}}_{=0}\rangle dt = 0$$

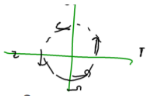
$f(x,y) = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} \overset{?}{\neq} \nabla\varphi$



$$\int_c f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\rangle dt = 2\pi$$

Jan 13-13:11

Beispiel: Wir betrachten das Vektorfeld



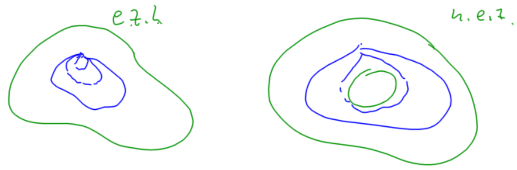
$$\mathrm{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Für den Einheitskreis $\mathrm{c}(t) := (\cos t, \sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$, findet man:

$$\begin{aligned}\int_c \mathrm{f}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathrm{f}(\mathrm{c}(t)), \dot{\mathrm{c}}(t)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi\end{aligned}$$

Jan 13-13:58

ist eine **hinreichende Bedingung**, falls das Gebiet D **einfach zusammenhängend** ist, d.h. keine "Löcher" enthält.



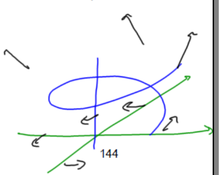
Jan 13-14:02

Beispiel: Für $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{x}) &:= (-y, x, z^2)^T \\ \mathrm{c}(t) &:= (\cos t, \sin t, at)^T, \qquad 0 \le t \le 2\pi\end{aligned}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned}\int_c \mathrm{f}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} &= \int_c (-y dx + x dy + z^2 dz) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + a^2 t^2 a)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + a^3 t^2)\, dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3}(2\pi)^3\end{aligned}$$



$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, a)$

$f(c(t)) = (-\sin t, \cos t, a^2 t^2)$

144

Jan 13-13:22

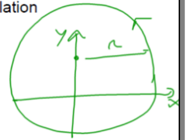
Jan 13-13:26

Definition: Ist $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral $\oint_c \mathrm{u}(\mathrm{x}) d\mathrm{x}$ entlang einer geschlossenen
Kurve auch die **Zirkulation** des Feldes $\mathrm{u}(\mathrm{x})$.

Beispiel:

Für das Feld $\mathrm{u}(x,y) = (y,0)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathrm{c}(t) = (r\cos t, 1 + r\sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$ die Zirkulation

$$\begin{aligned}\oint_c \mathrm{u}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r\sin t)(-r\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r\sin t - r^2 \sin^2 t) dt \\ &= \left[r\cos t - \frac{r^2}{2}(t - \sin t \cos t)\right]_0^{2\pi} = -\pi r^2\end{aligned}$$



$\dot{c}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$u(c(t)) = (1 + r\sin t, 0)$

145

Jan 13-13:26

Definition:

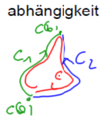
Ein stetiges Vektorfeld $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **wirbelfrei**, falls dessen Kurvenintegral längs **aller** geschlossenen, stückweise C^1–Kurven $\mathrm{c}(t)$ in D verschwindet, d.h.

$$\forall\, \mathrm{c} \quad : \quad \oint_c \mathrm{f}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = 0$$

Bemerkung: Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_c \mathrm{f}(\mathrm{x}) dx$ nur vom Anfangs– und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve c abhängt.
Man sagt: das Kurvenintegral ist **wegunabhängig**.

Frage:

Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ **garantieren** die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?



Falls nicht wegunabh.

$0 \neq \int_{C_1} - \int_{C_2} = \int_{(C_1 + -C_2)} = \int_C = \oint_C$

146

Jan 13-13:33

Definition:

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve verbunden werden können:

$$\forall \mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0 \in D \;:\; \exists \mathrm{c} : [a,b] \to D \quad : \quad \mathrm{c}(a) = \mathrm{x}^0 \wedge \mathrm{c}(b) = \mathrm{y}^0$$

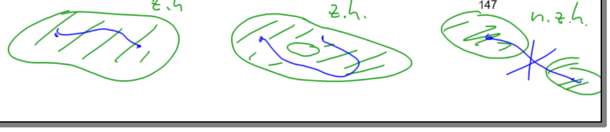
Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein **Gebiet** in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung:

Eine **offene** Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **nicht** zusammenhängend, wenn es **disjunkte**, offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$U_1 \cap D \neq \emptyset, \quad U_2 \cap D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cup U_2$$

z.h. z.h. n.z.h.



147

Jan 13-13:36

Definition:

Sei $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld nennt man ein **Gradientenfeld**, falls es eine skalare $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \nabla\varphi(\mathrm{x})$$

Die Funktion $\varphi(\mathrm{x})$ heißt dann **Stammfunktion** oder **Potential** von $\mathrm{f}(\mathrm{x})$.

Bemerkung:

Ein Massenpunkt bewege sich in einem **konservativen** Kraftfeld $\mathrm{K}(\mathrm{x})$,
d.h. K besitzt ein Potential $\varphi(\mathrm{x})$.
Dann ist $U(\mathrm{x}) = -\varphi(\mathrm{x})$ gerade die **potentielle Energie**:

$$\mathrm{K}(\mathrm{x}) = m\ddot{\mathrm{x}} = -\nabla U(\mathrm{x})$$

1 dim: $m\ddot{x}\dot{x} + U_x(x)\dot{x} = 0 = \frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)\right)$

148

Jan 13-13:41

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathrm{x}}$, so folgt:

$$m\langle\ddot{\mathrm{x}}, \dot{\mathrm{x}}\rangle + \langle\nabla U(\mathrm{x}), \dot{\mathrm{x}}\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\dot{\mathrm{x}}\|^2 + U(\mathrm{x})\right) = 0$$

$E = -\nabla\varphi_E$ el. F.
$F_g = -\nabla\varphi_g$ grav.
$F_C = -\nabla\varphi_C$ Coul.
$B \neq -\nabla\varphi_B$

Jan 13-13:43

ANALYSISIII.pdf - Adobe Reader
Datei Bearbeiten Anzeige Dokument Werkzeuge Fenster Hilfe
180 / 226 69,9% Suchen

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathrm{x}}$, so folgt:

$$m\langle\ddot{\mathrm{x}}, \dot{\mathrm{x}}\rangle + \langle\nabla U(\mathrm{x}), \dot{\mathrm{x}}\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\dot{\mathrm{x}}\|^2 + U(\mathrm{x})\right) = 0$$

$E = -\nabla\varphi_E$ el. F.
$F_g = -\nabla\varphi_g$ grav.
$F_C = -\nabla\varphi_C$ Coul.
$B \neq -\nabla\varphi_B$

Start ANALYSISIII.pdf - Adob... Start-Center anIII_13.01.10 * - SMA...

Jan 13-13:43

Hauptsatz für Kurvenintegrale:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ein stetiges Vektorfeld auf D.

1) Besitzt $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ein Potential $\varphi(\mathrm{x})$, so gilt für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurven $\mathrm{c} : [a,b] \to D$:

$$\int_{\mathrm{c}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \varphi(\mathrm{c}(b)) - \varphi(\mathrm{c}(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ist wirbelfrei.

2) Umgekehrt gilt: Ist $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ wirbelfrei, so besitzt $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ein Potential $\varphi(\mathrm{x})$.
Ist $\mathrm{x}^0 \in D$ ein fester Punkt, und bezeichnet c_{x} (für $\mathrm{x} \in D$) eine beliebige, die Punkte x^0 und x verbindende stückweise

149

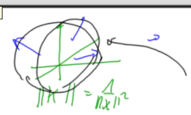
$$\int_c f(x)\,dx = \int_a^b \langle f(c(t)), \dot{c}(t)\rangle\,dt = \int_a^b \underbrace{\langle \nabla\varphi(c(t)), \dot{c}(t)\rangle}_{\frac{d}{dt}\varphi(c(t))}\,dt = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a))$$

Jan 13-13:47

ANALYSISIII.pdf - Adobe Reader
Datei Bearbeiten Anzeige Dokument Werkzeuge Fenster Hilfe
183 / 226 69,9% Suchen
Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

Beispiel:
Das zentrale Kraftfeld

$$\mathrm{K}(\mathrm{x}) := \frac{\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|^3}$$



besitzt das Potential

$$U(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\|\mathrm{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$$

Äqui potential fläche

Denn es gilt:

$$\nabla U(\mathrm{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}(x,y,z)^T = \frac{\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathrm{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geleistete Arbeit gilt dann:

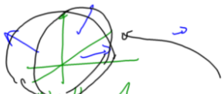
$$A = \int_{\mathrm{c}} \mathrm{K}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \left(\frac{1}{\|\mathrm{c}(a)\|} - \frac{1}{\|\mathrm{c}(b)\|}\right)$$

150

Start ANALYSISIII.pdf - Adob... Start-Center anIII_13.01.10 * - SMA...

Jan 13-13:53

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.



$\|K\| = \frac{1}{\|x\|^2}$

Beispiel:
Das zentrale Kraftfeld

$$\mathrm{K}(\mathrm{x}) := \frac{\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|^3}$$

besitzt das Potential

$$U(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\|\mathrm{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$$

Äqui potential flächen

Denn es gilt:

$$\nabla U(\mathrm{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}(x, y, z)^T = \frac{\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen C^1–Kurve $\mathrm{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ geleistete Arbeit gilt dann:

$$A = \int_c \mathrm{K}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \left(\frac{1}{\|\mathrm{c}(a)\|} - \frac{1}{\|\mathrm{c}(b)\|}\right)$$

Jan 13-13:53