3.3 Oberflächenintegrale

Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ eine C^1–Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \ : \ \mathbf{u} \in D\}$$

eine **Fläche** bzw. ein **Flächenstück**.

Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nannt man eine **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** der Fläche F.

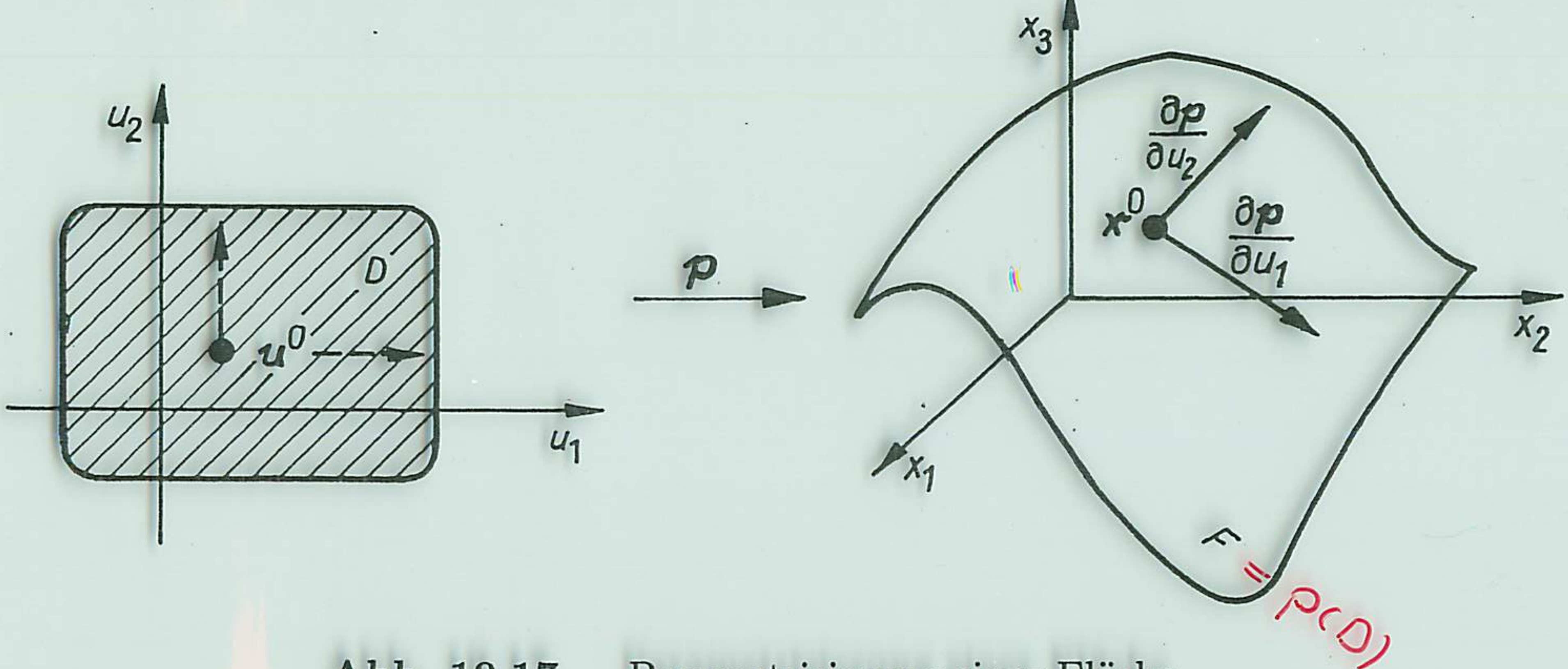


Abb. 19.17. Parametrisierung einer Fläche

163a)

Beispiel:

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H.

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit linear unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Beispiel:

Der Graph einer skalaren $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.

Tangentialebene:

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen **tangential** an die Fläche F.

Sie spannen die **Tangentialebene** $T_{\mathbf{x}^0}F$ an die Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$T_{\mathbf{x}^0}F \;:\; \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Frage:

Wie kann ich den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

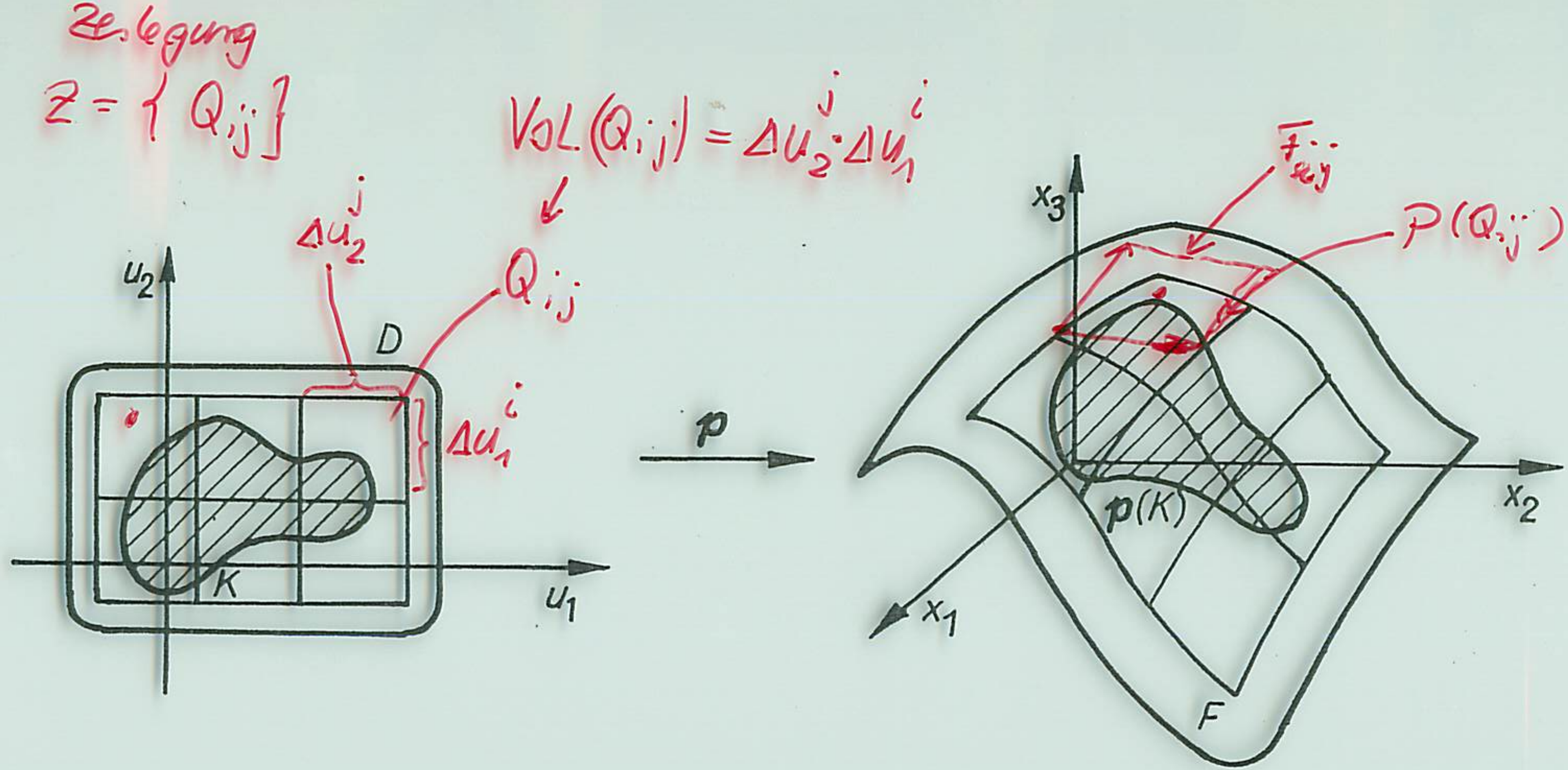


Abb. 19.18. Quaderüberdeckung einer Fläche

Definition:

Sei $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend.
Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das **Oberflächenintegral**

$$\int\limits_{\mathbf{p}(K)} do := \int\limits_K \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}}_{=: do}$$

Dabei nennt man den Term

$$do := \cancel{\int\limits_K} \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| du$$

auch das **Oberflächenelement** der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$.
Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationssatz.

Beispiel:

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit festem Radius r und

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man wegen

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z do = \int_K r d(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dz d\varphi = 2\pi r H$$

Beispiel: $p(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi(x_1, x_2) \end{pmatrix}$

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \varphi_{x_1} \\ 0 & 1 & \varphi_{x_2} \end{vmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

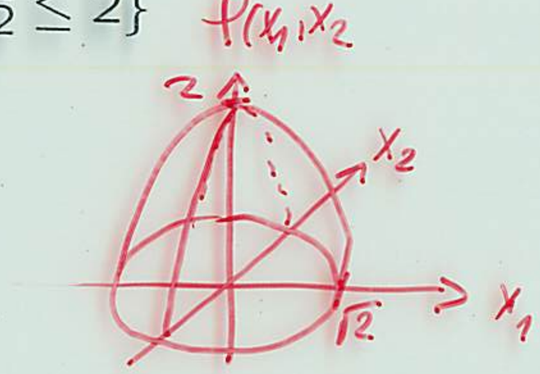
und

$$O(\mathbf{p}(K)) = \int\limits_{\mathbf{p}(K)} do = \int\limits_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}\, d(x_1, x_2)$$

Beispiel:

Wir berechnen die Oberfläche des Paraboloids P gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ \underbrace{x_3}_{\varphi(x_1,x_2)} = 2 - x_1^2 - x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$$



Dann gilt:

$$O(P) = \int\limits_{x_1^2+x_2^2\leq 2} \sqrt{1 + \underbrace{4x_1^2}_{(\varphi_{x_1})^2} + \underbrace{4x_2^2}_{\varphi_{x_2}^2}}\, d(x_1, x_2)$$

Transformationssatz
"Polarkoordinaten"

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\, \underbrace{r}_{\det J\Phi}\, d\varphi\, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s}\, ds$$

$$= \pi \left[\frac{1}{6}(1 + 4s)^{3/2}\right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{6}(27 - 1)\right) = \frac{13}{3}\pi$$

Bemerkung:

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^{2} = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \rangle^{\cancel{2}}, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2)$$

Beispiel:

Für das Oberflächenelement der Sphäre Oberfläche der Kugel zum Radius r

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$E = r^2\cos^2\theta, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2)$$

folgt daher

$$do = r^2 \cos\theta \, d(\varphi, \theta), \qquad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wir können nun die Oberfläche der Sphäre berechnen:

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Definition:

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine $\mathcal{C}^1$–Parametrisierung einer Fläche $F = \mathbf{p}(K)$, $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend.

1) Für eine stetige Funktion $f : F \to \mathbb{R}$ definiert man das **Oberflächenintegral 1. Art** durch

$$\int\limits_F f(\mathbf{x})\, do := \int\limits_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}$$

2) Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : F \to \mathbb{R}^3$ definiert man das **Oberflächenintegral 2. Art** durch

$$\int\limits_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do := \int\limits_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u}$$

Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u} \\ &= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u} \end{aligned}$$

Bemerkung:

1) **Physikalische Interpretation der Oberflächenintegrale:**
Ist $\rho(\mathrm{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Integral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.
Ist $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Integral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den **Fluss** von $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ durch die Fläche F.

2) Ist F eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberflächen eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir wiederum

$$\oint_F f(\mathrm{x})\, do \quad \text{bzw.} \quad \oint_F \mathrm{f}(\mathrm{x})\, do = \int_F \langle \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{n}(\mathrm{x})\rangle\, do$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathrm{n}(\mathrm{x})$ nach außen weist.

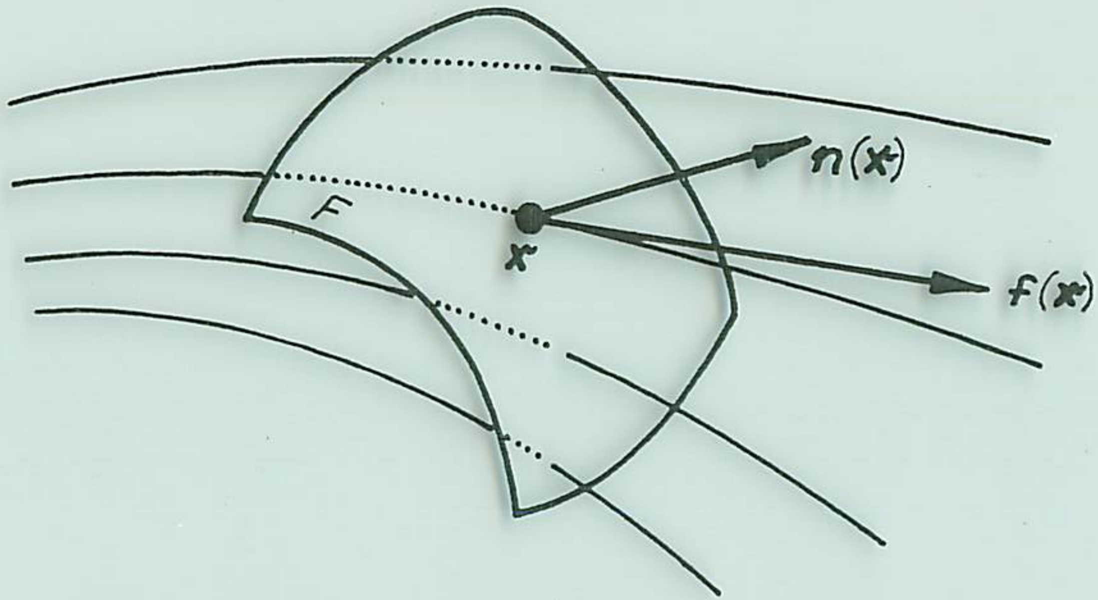


Abb. 19.19. Fluss durch eine Fläche

176a)

Satz: (Integralsatz von Gauß)

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h. G sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale $\mathrm{n}(\mathrm{x})$.

Ist $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^3$ dann ein C^1–Vektorfeld mit $G \subset D$, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathrm{f}(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \oint_{\partial G} \mathrm{f}(\mathrm{x})\, do = \int_{\partial G} \langle f, n \rangle \, do$$

Interpretation:

Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathrm{x}) := \operatorname{div} \mathrm{f}(\mathrm{x})$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathrm{f}(\mathrm{x})$. Ist $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer **inkompressiblen** Strömung, so gilt $\operatorname{div} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$ und daher

$$\oint_{\partial G} \mathrm{f}(\mathrm{x})\, do = 0$$

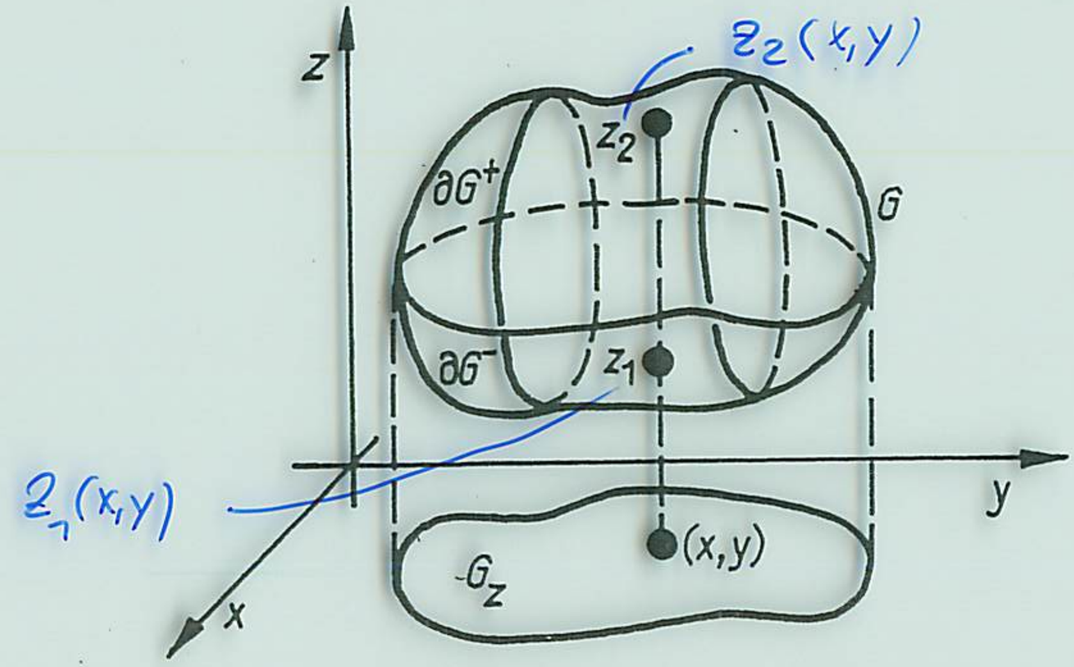


Abb. 19.20. z–Projektion

177a)

Beispiel:

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \overset{= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\mathbf{x}}$ und die Kugel K:

$$K := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\text{div}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3$$

und damit

$$\int_K \text{div}\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 3 \cdot \overset{= \frac{4\pi \cdot 1^3}{3}}{\text{vol}(K)} = 4\pi$$

Das entsprechende Oberflächenintegral läßt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. die Parametrisierung der Kugel

durch Kugelkoordinaten, berechnen.

Satz: (Formeln von Green)

Die Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für $\mathcal{C}^2$–Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

$$\int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do$$

$$\int_G (f \Delta g - g \Delta f)\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) do$$

Hierbei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis: Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, do \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle \, do = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, do \end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g.