Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die **globalen** Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g(x,y,z) \;=\; x^2 + y^2 - 8 \;=\; 0$$

mit der Ebene

$$h(x,y,z) \;=\; x - y + 2z - 1 \;=\; 0.$$

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Aufgabe 2) [Klausur 2004/05] Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x,y) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; \min!$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1 \;=\; 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$ ein stationärer Punkt der Lagrange–Funktion F ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $HF(\boldsymbol{x}_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $Tg(\boldsymbol{x}_0)$.

Aufgabe 3) Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 27x_1 x_2^2 + 25 \\ 4x_1^2 - 3x_2^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie ein Näherung für eine nahe $\boldsymbol{x}^{[0]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelegene Lösung des Systems, in dem Sie ausgehend von $\boldsymbol{x}^{[0]}$ mindestens zwei Schritte des Newtonverfahrens durchführen.

Aufgabe 4: Klären Sie, ob die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls. Skizzieren Sie in jedem Fall die Integrationsbereiche.

a)

$$\int\int_{D_1} \sin(x-y)\, d(x,y) \quad \text{mit } D_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|\,(x,y)^T\,\|_1 \,\leq 1 \right\}$$

b)

$$\int\int_{D_2} 1\, d(x,y) \quad \text{mit } D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq 1,\ |y| \leq |1 - \sqrt{|x|}\,| \right\}$$

c)

$$\int\int_{D_3} f(x,y)\, d(x,y) \quad \text{mit } D_3 = [0,1] \times [-1,1],\ f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y}{x} & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

d)

$$\int\int_{D_4} f(x,y)\, d(x,y) \quad \text{mit } D_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq x \leq 1 \right\},\ f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y}{x} & x \neq 0\,, \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

Abgabetermine: 03.01.-07.01.2011

Das Mathe III Team wünscht Ihnen
ein frohes Weihnachtsfest
und ein gutes neues Jahr 2011!