Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:

Die Punkte $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$, welche die folgenden Ungleichungen erfüllen, bilden ein beschränktes Gebiet G:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad y \le \cos(x) \quad , \quad y \ge max\left\{(-2x-\pi), \left(\frac{2}{3}\,x - \frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

Berechnen Sie die $x-$ Komponente des Schwerpunktes von G bei konstanter Dichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho(x, y) = 1$ mittels Integration.

Aufgabe 2) [Aufgabe 2a, Klausur 08/09, Hinze/Kiani]

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (\, x^2 \,-\, xy \,+\, y^2 \,)\, d(x, y)$$

über

$$D := \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \, 4 \,\le\, x^2 + y^2 \,\le\, 9, \quad x \,\le\, 0, \quad y \ge\, 0\right\}.$$

Hinweise: Polarkoordinaten! Es gilt $\sin(2\phi) \,=\, 2\,\sin(\phi)\cos(\phi)$.

b) Gegeben sei das elliptische Rohrstück

$$R \subset \mathbb{R}^3, \quad R: \, 81 \,\le\, \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \,\le\, 100, \quad -5 \,\le z \,\le 5\,.$$

Das Rohrstück habe die konstante Dichte ρ .

Berechnen Sie das Volumen, die Masse und das Trägheitsmoment des Rohrstücks bzgl. der $y-$ Achse mittels Integration. Verwenden Sie die elliptischen Zylinderkoordinaten

$$x \,=\, 3r\cos(\varphi)\,,\; y \,=\, 2r\sin(\varphi)\,,\; z = z\,.$$

Aufgabe 3: [6+4 Punkte]

a) Gegeben sei die halbe Ellipsoid–Schale

$$\frac{16}{25} \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \le 1, \quad z \le 0$$

mit der Massendichte $\rho(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2}$.

Bestimmen Sie den Schwerpunkt.

b) Gegeben seien $M \subset \mathbb{R}^2$

$$M = \left\{(x,y)^T \mid -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

und $K \subset \mathbb{R}^3$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M, \sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le 2 + x^2 + y^2 \right\}$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt von K bei homogener Massenverteilung.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Potentiale der folgenden Vektorfelder $\boldsymbol{f}^{[k]}$ mit den Definitionsgebieten D_k, sofern diese (Potentiale) existieren.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^{[1]} &= (xe^{xy}, ye^{xy}, 1)^T, \quad D_1 = \mathbb{R}^3, \\
\boldsymbol{f}^{[2]} &= (ye^{xy}, xe^{xy}, 1)^T, \quad D_2 = \mathbb{R}^3 \\
\boldsymbol{f}^{[3]} &= \frac{1}{x^2+y^2}(-x, y)^T, \quad D_3 = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\right\} \\
\boldsymbol{f}^{[4]} &= (y\cos(z) + yz, x\cos(z) + xz + 2y, -xy\sin(z) + xy + 1)^T, \quad D_4 = \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Abgabetermine: 17.01.-21.01.2011