Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AI	BU	ET	IN	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Aufgabe	**a)i)**	**a) ii)**	**a) iii)**	**a) iv)**	**b) i)**	**b) ii)**	**c**	$\sum$ =
erreichbare Punkte	1	1	2	3	1	1	1	10
erreichte Punkte								

BONUS =

Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, und tragen Sie Ihre Antworten in die dafür vorgesehenen Zeilen ein. Es gibt keine negativen Punkte. Der Lösungsweg wird nicht bewertet.

a) **Hinweis: Ausmultiplizieren ist nicht nötig!**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + 3x + 4)(y^2 + 4)$.

(i) Dann gilt

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x, y) = ((2x + 3)(y^2 + 4),\, 2y(x^2 + 3x + 4))}$$

(ii) Im Punkt $(0, 0)^T$ gilt für die Hessematrix $Hf(x, y)$

$$\boxed{\mathrm{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$$

(iii) Das Taylorpolynom zweiten Grades zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lautet

$$\boxed{T_2(x,y) \;=\; 16 + 12x + 4x^2 + 4y^2\,.}$$

(iv) f hat einen stationären Punkt P_0. Geben Sie diesen an und Klassifizieren Sie ihn.

$$\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ist ein

- [ ] lokales Maximum.
- [X] lokales Minimum.
- [ ] Sattelpunkt.

denn die Eigenwerte der Hessematrix von f in P_0 sind:

$$\boxed{\lambda_1 \;=\; 8 \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{7}{2}}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x+y \end{pmatrix}$.

(i) Dann gilt für die Jacobi-Matrix von f

$$\boxed{\mathrm{J}f(x,\,y) \;=\; \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(ii) Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte, für die $\mathrm{J}\,f(x,y)$ singulär ist. Dann gilt:

$$\boxed{S \;=\; \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = 0 \,\vee\, y = 2x \right\}}$$

c) Durch $f(x,y) \;=\; 2x^3 + 4y^3 - \;3xy -\; 1 \;=\; 0$ ist in der Umgebung von $P_0 = (1,\,-1)$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$f(x,y) \;=\; 0 \implies y = g(x), \quad g(1) = \;-1\,.$$

Dann ist:

$$\boxed{g\,'(1) \;\;=\;\; -1}$$