

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man skizziere den durch $x = 0$ und $x + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich P und berechne $\int \int_P y^2 d(x, y)$

- a) indem zuerst nach y und dann nach x integriert wird und
- b) indem zuerst nach x und dann nach y integriert wird.

Aufgabe 22:

Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel K und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 23:

- a) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Dabei ist \mathbf{c} die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H : x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

- b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Man zeige, dass \mathbf{f} ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.
b) Man berechne ein Potential von \mathbf{f} durch Hochintegrieren und
c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Abgabetermin: 16.1. - 20.1. (zu Beginn der Übung)