Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad f_3 = f_2 \circ f_1,$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \cos\theta \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \cos\theta \\ c \cdot r \cdot \sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5(t) = (\Phi \circ g)(t) = \Phi(t, y(t)) \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & C^2 - \text{Funktion} \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g, \Phi \quad C^2 - \text{Funktionen} \\ g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} & \Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \Phi(x_1, x_2). \end{cases}$$

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}^0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Können Sie entscheiden, ob es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\tilde{\boldsymbol{v}} = 1/\sqrt{17}(0, -4, 1)^{\mathrm{T}}$. Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?
Berechnen Sie den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Ergibt sich da nicht ein Widerspruch?
Berechnen Sie nun den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

Bearbeitungstermine: 05.11.-09.11.2012