Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2012/13**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}\,,\ \boldsymbol{g}\ :\ \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^3\,,$

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz - \dfrac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -2yz - \dfrac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ x^2 - y^2 - \dfrac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+z \\ y^2z+z^3 \\ -y \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c}\ :\ [0,\frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\,.$$

a) Berechnen Sie die Rotationen **rot f** und **rot g**.

b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, ob diese ein Potential besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Aufgabe 2: (Klausur 2011, Prof. Oberle)

Gegeben sei

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \le z \le 2,\ 0 \le x^2+y^2 \le z^2 \right\}\,,$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\ :\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{f}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}\,.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_R \operatorname{div}\ \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\,d(x,y,z)\,.$

b) R ist berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie Parametrisierungen von D und M an und berechnen Sie den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch D, also

$$\int_D \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\,dO\,.$$

c) Wie groß ist nach a) und b) der Fluß durch den gewölbten Teil des Randes von R, also

$$\int_M \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\,dO\,?$$

Bearbeitungstermine: 28.01.-01.02.2013