

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

Man berechne die Gradienten für folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, b) $f(x, y) = x^2 - 4y$, c) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$,
d) $f(x, y) = x - 4y$

und zeichne ein Bild im Bereich $[-2, 2] \times [-2, 2]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$.

- a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.
b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-3, 3] \times [-4, 4]$.
c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

- d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.
e) Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad} f(3, -4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

- a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.
- b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
- c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f und
- d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x, t) = 2 \sin(x + ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

- b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x, y) = e^{-x} \sin y + (x + 5)(y - 6)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Abgabetermin: 21.10. - 25.10.2013 (zu Beginn der Übung)