

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man skizziere den Bereich

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}.$$

und berechne $\int \int_D xy \, d(x, y)$

- a) indem zuerst nach y und dann nach x integriert wird und
- b) indem zuerst nach x und dann nach y integriert wird.

Aufgabe 22:

Man zeichne den durch $1 \leq z \leq 2$, $0 \leq y$ und $x^2 + y^2 \leq 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 23:

- a) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Dabei ist \mathbf{c} die mathematisch positiv durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G .

- b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ mit der Kurve

$$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24: (Klausur SoSe 2004, erweitert)

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\sin y + 3x^2 z^2, x \cos y + \frac{1}{1+y^2}, 1 + 2x^3 z \right)^T.$$

- Man weise die Existenz eines Potentials zu \mathbf{f} nach, ohne es zu berechnen.
- Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von \mathbf{f} und
- mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
- Gegeben sei die Kurve $\mathbf{c} : [0, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 0, \sin t)^T$. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

- Man zeichne die Kurve \mathbf{c} unter Verwendung der MATLAB-Routine 'plot3'.

Abgabetermin: 13.1. - 17.1.2014 (zu Beginn der Übung)