

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6

#### Aufgabe 21:

Man skizziere den Bereich

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}.$$

und berechne  $\int \int_D xy \, d(x, y)$

- a) indem zuerst nach  $y$  und dann nach  $x$  integriert wird und
- b) indem zuerst nach  $x$  und dann nach  $y$  integriert wird.

#### Aufgabe 22:

Man zeichne den durch  $1 \leq z \leq 2$ ,  $0 \leq y$  und  $x^2 + y^2 \leq 9$  gegebenen halben Zylinder  $Z$  und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion  $\rho(x, y, z) = z$  unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

**Aufgabe 23:**

- a) Für das Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$  berechne man das Kurvenintegral  $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Dabei ist  $\mathbf{c}$  die mathematisch positiv durchlaufene Randkurve des durch  $x^2 \leq y \leq x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  eingeschlossenen Gebietes  $G$ .

- b) Für das Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral  $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  mit der Kurve

$$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 24:** (Klausur SoSe 2004, erweitert)

Gegeben sei das Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left( \sin y + 3x^2 z^2, x \cos y + \frac{1}{1+y^2}, 1 + 2x^3 z \right)^T.$$

- Man weise die Existenz eines Potentials zu  $\mathbf{f}$  nach, ohne es zu berechnen.
- Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von  $\mathbf{f}$  und
- mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
- Gegeben sei die Kurve  $\mathbf{c} : [0, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 0, \sin t)^T$ . Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

- Man zeichne die Kurve  $\mathbf{c}$  unter Verwendung der MATLAB-Routine 'plot3'.

**Abgabetermin:** 13.1. - 17.1.2014 (zu Beginn der Übung)