

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y, \sin x)^T$$

und das Gebiet G , das von der Funktion $y = 1 - (x - 1)^2$ und der x -Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Fläche

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + y \leq z\} .$$

- Man zeichne die Fläche K ,
- parametrisiere K und
- berechne den Flächeninhalt von K mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Hinweis:

In b) eignen sich Kugelkoordinaten,

zu c) $\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)$.

Aufgabe 27: (Klausur WiSe 2005/06)

Gegeben seien der Körper

$$E = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 16, 0 \leq y, z \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(x^3, \frac{y^3}{4}, z^3 \right)^T.$$

- Man skizziere E .
- Der Rand von E ist beschreibbar durch zwei ebene Flächenstücke B und F und ein nichtebenes Flächenstück S .
Man gebe Parametrisierungen für die beiden ebenen Randflächenstücke B und F an.
- Man berechne jeweils den Fluss von \mathbf{f} durch die beiden ebenen Randflächenstücke B und F .
- Man berechne das Volumenintegral $\int_E \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z)$.
- Man bestimme den Fluss durch das nichtebene Flächenstück S .

Aufgabe 28:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(x, y, z) = (-y^2, yz, x)^T$ einer Strömung sowie die Fläche

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad z = xy \right\}.$$

- Man zeichne die Fläche S mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezmesh' oder 'ezmeshc'.
- Man berechne auf S das Integral über alle Wirbelstärken $\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{o}$.
- Man berechne die Zirkulation $\oint_{\partial S} \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ von \mathbf{v} längs der Randkurve ∂S von S und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3 .

Abgabetermin: 27.1. - 31.1.2014 (zu Beginn der Übung)