Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwinden die Determinanten der Jacobi-Matrizen?

$$f_1 \; : \; \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ xy \\ xz^3 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 \; : \; \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u-2v \\ u-2w \\ v+w \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 = f_2 \circ f_1$$

$$f_4 \; : \; \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_5 \; : \; \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_5(t) = \Phi(t, y(t)) \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \Phi, y \quad C^2 - \text{Funktionen} \end{cases}$$

Aufgabe 2:

a) Ein C^1–Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *quellenfrei*, falls $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt. Im Fall $n = 3$ heißt das Vektorfeld *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt.

Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) \;:=\; \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}} \,,\, \frac{x}{r^{2\alpha}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 \,.$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ (nach der üblichen Einbettung im $\mathbb{R}^3$) wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y) = 0 \iff (f_2)_x - (f_1)_y = \mathbf{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion f identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige f identisch verschwinded.

Abgabetermine: 3.-7.11.2014 bzw. 17.-21.11.2014