Dr. Hanna Peywand Kiani

Vorlesungsvertretung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vorlesung 1: Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren

17.10.2014

Betrachte: $f : D \to \mathbb{R}^1$, $\quad \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$, $\quad D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Beispiel: Zustandsgleichung eines idealen Gases

$p =$ Druck, $V =$ Volumen, $T =$ Temperatur, $R =$ universelle Gaskonstante

$$\boxed{p \cdot V = R \cdot T}$$

Dann ist zum Beispiel: $V = V(p, T) = \dfrac{R \cdot T}{p} = \underbrace{R \cdot T}_{\text{konst.}} \cdot p^{-1}$ $\qquad \dfrac{d}{dp}$

Hier: $n = 2$ $\qquad x_1 = p \quad x_2 = T$ $\qquad f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{R \cdot x_2}{x_1}$

Frage: mit welcher Rate ändert sich V in Abhängigkeit von T bzw. p

$$\frac{V(p + \Delta p, T) - V(p, T)}{\Delta p} \xrightarrow[\Delta p \to 0]{}$$

Abl. nach p $\quad V_p(p, t)$

$$= \frac{\partial}{\partial p} V(p, t) = R \cdot T \cdot (-p^{-2})$$

Definition: partielle Ableitung
$f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{x}^0 \in D$

- f heißt in $\boldsymbol{x}_{\cancel{0}}^{0}$ nach x_j **partiell differenzierbar**, wenn der Grenwert

  $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^0) := f_{x_j}(\boldsymbol{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

  $$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j + h \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

  existiert.

- f heißt partiell diff.bar in $\boldsymbol{x}^0$, wenn f in $\boldsymbol{x}^0$ nach allen Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ part. diff.bar ist.

- f heißt **stetig partiell diff.bar** in D, wenn alle f_{x_j}, $j = 1, \ldots, n$ für alle Punkte aus D existieren und stetig sind. (C^1- Funktion)

Beispiel: $f(x,y) := x^2 + \underbrace{2xy}_{\text{konst}} + \overbrace{\sin(y)}^{\text{konst}}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = \lim_{h=\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)y + \sin(y) - (x^2 + 2xy + \sin(y))}{\Delta x}$$

$x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} + \frac{2y(\cancel{x} + \Delta x) - 2\cancel{y}x}{\Delta x} + \frac{\sin(y) - \sin(y)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2x \cdot \cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} + 2y + 0 \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x + 2y + 0 \right) = \underline{\underline{2x}} + \underline{\underline{2y}} + 0$$

Differentiationsregeln.

- Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})\Big) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})\Big) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2} \qquad \text{für } g(\mathbf{x}) \neq 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

- Man verwendet alternativ die Bezeichnungen

$$\underline{D_i f(\mathbf{x}^0)} \qquad \text{oder} \qquad \underline{f_{x_i}(\mathbf{x}^0)}$$

für die partielle Ableitung von $f(\mathbf{x})$ nach x_i in $\mathbf{x}^0$.

□

Gradient und Nabla-Operator.

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und partiell differenzierbar.*

- *Man bezeichnet den* **Zeilenvektor**

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)$$

als `Gradient` *von* $f(\mathbf{x})$ *in* $\mathbf{x}^0$.

- *Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor*

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

als `Nabla-Operator`.

- *So bekommt man den* **Spaltenvektor**

$$\underline{\nabla f(\mathbf{x}^0)} := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)^T.$$

□

Weitere Differentiationsregeln. Seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \cdot \operatorname{grad} f + \beta \cdot \operatorname{grad} g \\
\operatorname{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g \\
\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{1}{g^2}(g \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \operatorname{grad} g) \qquad \text{für } g \neq 0
\end{aligned}$$

Beispiele:

- Sei $f(x,y) = e^{\cancel{x}\,2x} \cdot \sin y$. Dann gilt: $\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x, f_y)$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (\cancel{e^x}\,2e^{2x} \cdot \sin y, e^{\cancel{x}\,2x} \cdot \cos y) = e^x(\sin y, \cos y)$$

- Für $r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ gilt

$$\operatorname{grad} r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \qquad \text{für } (\mathbf{x} \neq 0),$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ Zeilenvektor.

Beispiel: $r(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

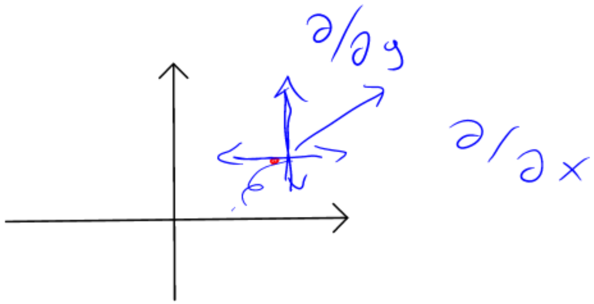
$$\frac{\partial \cancel{r}}{\partial x_1} r(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial r}{\partial x_1} \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \underbrace{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)_{x_1}}_{2x_1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-1/2} \cdot 2x_1$$

$$= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$

$$\frac{\partial \cancel{r}}{\partial x_j} r(\boldsymbol{x}) = \frac{x_j}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x_j}{\|\vec{x}\|_2}$$

$$\text{grad } r(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_1}{r(\vec{x})}, \ldots, \frac{x_n}{r(\vec{x})}\right) = \frac{(x_1, \ldots, x_n)}{r(\vec{x})}$$



8

ACHTUNG: Die partiellen Ableitungen sagen etwas darüber aus, wie sich die Funktionswerte in einem Punkt ändern, wenn man an **einer** Koordinate dieses Punktes wackelt. Sie sagen nichts darüber aus, was passiert wenn man an mehreren Koordinaten gleichzeitig wackelt.

Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt nicht einmal die Stetigkeit!

Stetigkeit:

Gegeben: Funktion $f\ : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

f heißt **stetig** in $\boldsymbol{x} \in D \iff$ für jede Folge $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) \to f(\boldsymbol{x})\,.$$

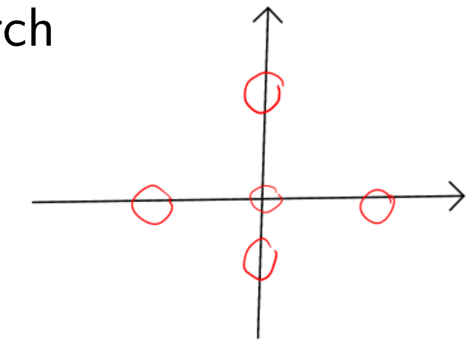
f heißt stetig (in D) $\iff$ f stetig in jedem Punkt aus D.

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist im Allgemeinen **nicht** stetig.

Gegenbeispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$



Die Funktion $f(x,y)$ ist auf **ganz** $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, und es gilt

s. unten

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= f_y(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

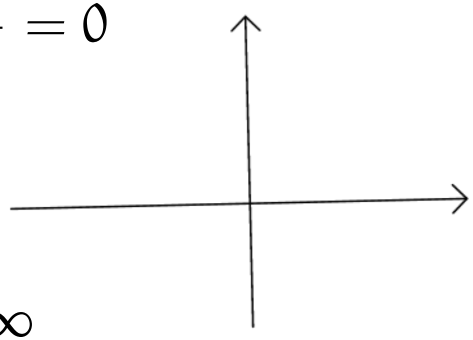
Beispiel (Fortsetzung).

$(x,y) \neq (0,0)$: $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{(t^2+0^2)^2} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{(0^2+t^2)^2} - 0}{t} = 0$$



Aber: Im Nullpunkt $(0,0)$ ist die Funktion **nicht** stetig, denn

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \to \infty$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0.$$

□

Bemerkung. Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion f zu garantieren, benötigt man somit zusätzliche Voraussetzungen an f.

Satz: *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, in einer Umgebung von* $\mathbf{x}^0 \in D$ *partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, *dort* **beschränkt**, *so ist* $f(\mathbf{x})$ **stetig** *in* $\mathbf{x}^0$.

Beachte: In unserem vorigen Beispiel sind die partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung der Null $(0, 0)$ **nicht** beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \qquad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

$\square$

Beweis des Satzes.

z.z: $\|x - x^0\|_\infty \to 0$ $\max_j |\vec{x} - \vec{x}_j^0|$

$\Rightarrow \|f(x) - f(x^0)\| \to 0$

Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$f_{x_n}(\cdot\,\cdot) \cdot (x_n - x_n^0)$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)) \\
&+ (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\
&+ (f(x_1, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\
&\;\;\vdots \\
&+ (f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0))
\end{aligned}
$$

Für jede Differenz auf der rechten Seite betrachten wir f als univariate Funktion:

$g(z) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz

$$\frac{g(x_n) - g(x_n^0)}{x_n - x_n^0} = g'(\xi) \qquad g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

$\| \; \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{\xi}_n)$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0.

13

Vollendung des Beweises.

Anwendung des **Mittelwertsatzes** auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \quad = \quad & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\
+ \quad & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\
\vdots \quad & \\
+ \quad & \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0)
\end{aligned}
$$

$\left|\frac{\partial}{\partial_n} f \cdot\cdot \right| \leq C_n$

Mit der Beschränktheit der partiellen Ableitungen gilt

$\leq \|\vec{x} - \vec{x}^0\|_\infty$

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq C_1|x_1 - x_1^0| + \ldots + C_n|x_n - x_n^0| \leq n \cdot C_{max} \cdot \|x - x_0\|_\infty$$

für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, und damit ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in $\mathbf{x}^0$, denn es gilt

$$f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{für } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \to 0. \qquad \blacksquare$$

Folgerung: Stetig partiell differenzierbare Funktionen sind stetig, d.h. $C^1 \subset C^0$.

Höhere Ableitungen.

Definition: *Eine skalare Funktion* $f(\mathbf{x})$ *sei auf einer offenen Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen von* f *erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche* `partiellen Ableitungen zweiter Ordnung` *von* f *mit*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad \textit{für } i, j = 1, \ldots, n.$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)$$

□

Beispiel: $f(x,y) := x^2 + 2xy + \sin(y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_x(x,y) = 2x + 2y\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y(x,y) = 2\cancel{y}^{x} + \cos(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = f_{xx}(x,y) = 2 + 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(x,y) =: f_{xy}(x,y) = 0 + 2$$

$$H f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y) =: f_{yx}(x,y) = 2 + 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = f_{yy}(x,y) = 0 - \sin(y)$$

Hier: $f_{xy} = f_{yx}$. Ist das immer so?

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: *Die Funktion* $f(\mathbf{x})$ *heißt* k-fach partiell differenzierbar, *falls alle Ableitungen*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \qquad \text{für alle } i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$$

der Ordnung k *auf* D *existieren.*

Alternative Notation:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \ldots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k*-ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion* $f(\mathbf{x})$ k-fach stetig partiell differenzierbar *oder auch* C^k-Funktion *auf* D. *Stetige Funktionen* $f(\mathbf{x})$ *nennen man* C^0-Funktionen. □

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n \ldots \partial x_1} = ?$

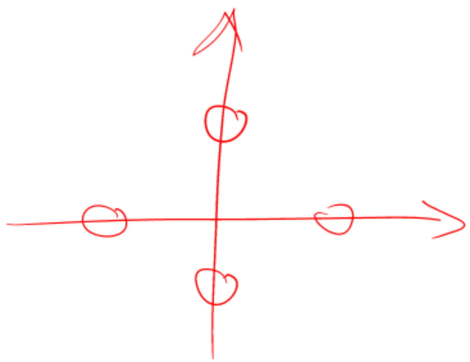
17

Partielle Ableitungen nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen **nicht** beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



berechnet man direkt

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = +1 \end{aligned}$$

d.h. $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. $\square$

$$f(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) := 0.$$

$$f_x(0,0) = \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

$z' \cdot n$ $\quad n' \cdot z$

$$f_x(x,y) = \underset{=}{y}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \underset{=}{xy}\,\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$f_{xy}(0,0) = \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \frac{h\frac{0-h^2}{0+h^2}+0-0}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

Analog rechnet man

$$f_y(x,y) = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yx}(0,0) = \frac{f_y(h,0) - \overset{0}{f_y(0,0)}}{h} = \frac{h\frac{h^2}{h^2} + 0 - 0}{h} = +1$$

20

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine* C^2*-Funktion, so gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \textit{für alle } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweisidee: Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes (**Übung**). □

Folgerung: Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^k-Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung **beliebig** vertauschen! □

Beispiel. Berechne für die Funktion

$$f(x,y,z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz}.

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist beliebig vertauschbar, da $f \in C^3$.

- Differenziere zunächst nach z:

$$f_z(x,y,z) = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

- Differenziere dann f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})\right) \\ &= 3x^2y^2 \cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

- Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz}(x,y,z) = 6x^2 y \cos(x^3)$$

$$f(x,y,z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh(y) + 17 e^{x^2}) z^2$$

$$f_y(x,y,z) = z \sin(x^3) \cdot 2y + z^2 \cdot \sinh(y)$$

$$f_{yx}(x,y,z) = 2yz \cos(x^3)\, 3x^2$$

$$f_{yxz}(x,y,z) = 6yx^2 \cos(x^3) \cdot 1$$

$$f_{yxz} = f_{zxy} =$$

Der Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots$$

Für eine skalare Funktion $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}.$$

- Beispiele für (relevante) partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \qquad \text{(Wellengleichung)}$$

$$\Delta u(x,y,z) - \frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung)}$$

- Falls $\Delta u = 0$, so heißt f harmonisch.

Beispiel: Für $u(x) \equiv u(r(x))$, kurz $u = u(r)$, wobei $r = \|x\|_2$, gilt

$$\left(u(r(\vec{x})) \right)' = u'(r) \frac{\partial}{\partial x_i} r$$

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(r) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u'(r) \frac{x_i}{r} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \frac{r - x_i^2/r}{r^2} \right\} \\
&= \frac{u''(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{u'(r)}{r^3} \sum_{i=1}^{n} (r^2 - x_i^2) \\
&= u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r).
\end{aligned}$$

□