Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2014/15

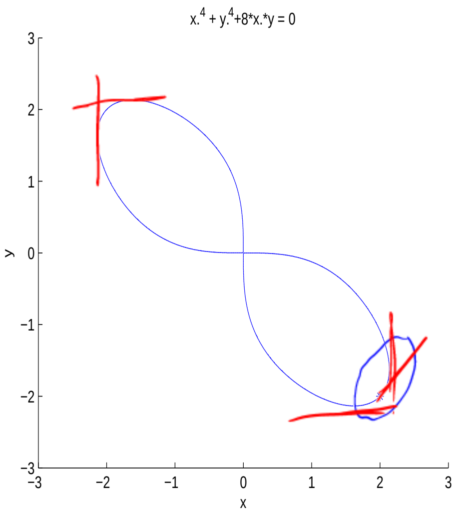
Dr. Hanna Peywand Kiani

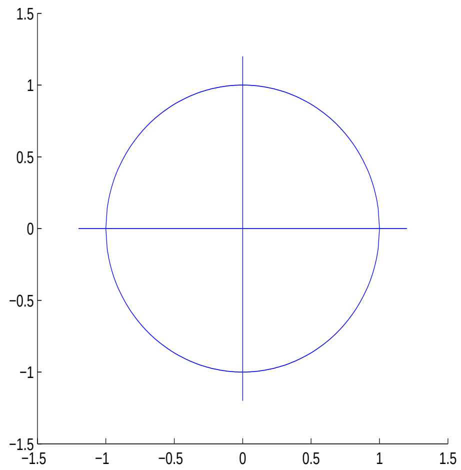
Vorlesungsvertretung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

implizit definierte Kurven und Flächen

21.11.2014

Zur Erinnerung: Kurve gegeben durch $g(x, y) = 0$





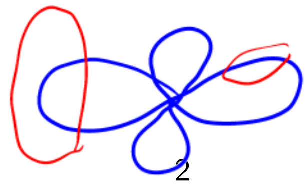
Falls $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ gibt es in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Funktion f mit

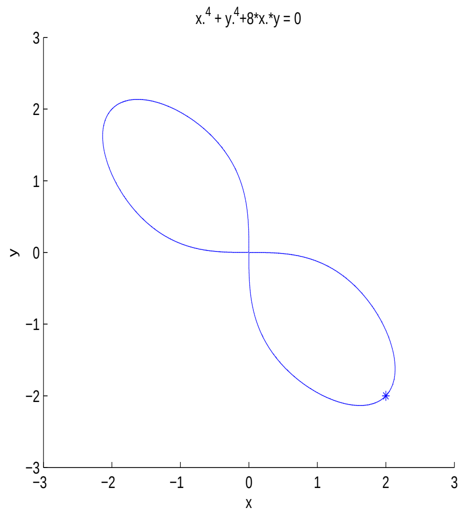
$$f(x_0) = y_0 \text{ und } g(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

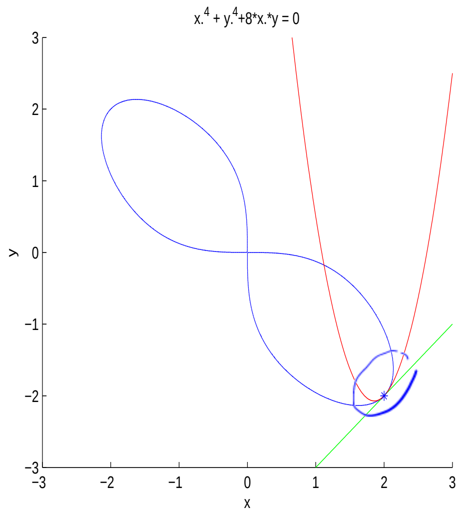
f ist nicht unbedingt explizit bekannt!

Frage: kann man Approximationen von $y(x)$ in der Nähe eines Lösungspunktes (x_0, y_0) angeben? Taylor-Polynom 1. Grades (Tangente) oder Taylor 2. Grades?

Besondere Punkte







Implizites Differenzieren:

Es sei $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Funktion $y(x)$, so dass in einer Umgebung von (x_0, y_0):

$g(x, y(x)) = 0$. Damit folgt:

$g(x,y(x)) = 0$ konst

S.ü.i.F

$$\frac{d}{dx}\, g(x, y(x)) = \overset{x'}{g_x} + g_y \cdot y'(x) = 0 \Longrightarrow \boxed{y'(x) = -\frac{g_x}{g_y}}$$

$$T_1(x; x_0) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$$

und durch nochmaliges Ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left(g_x(x,\overset{y(x)}{y}) + g_y(x,\overset{y(x)}{y}) \cdot y'(x)\right) = 0$$

$u \cdot v$

implizites differenzieren $\Longrightarrow$

$$g_{xx} + g_{xy}\, y' + [g_{yx} + g_{yy} y'] \cdot y' + g_y \cdot y'' = 0$$

$u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\Longleftrightarrow \quad g_y \cdot y'' = -g_{xx} - \underbrace{g_{xy}\, y' - g_{yx} \cdot y'} - g_{yy}(y')^2$$

$y' = -\frac{g_x}{g_y}$ einsetzen $\Longrightarrow$

$$g_y \cdot y'' = -g_{xx} + g_{xy}\frac{g_x}{g_y} + g_{yx}\frac{g_x}{g_y} - g_{yy}\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^2 = \frac{-g_{xx}\, g_y^2 + 2 g_{xy} \cdot g_x \cdot g_y - g_{yy}\, g_x^2}{g_y^2}$$

$$\boxed{y'' = \frac{-g_{xx} \cdot g_y^2 + 2\, g_{xy} \cdot g_x \cdot g_y - g_{yy} \cdot g_x^2}{g_y^3}}$$

Also T_2 :

$$T_2(x; x_0) = y_0 - \frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\, y''(x_0)(x - x_0)^2$$

Gilt in einem Punkt (x_0, y_0)

$y(x)$ $\qquad y'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$

- $\boxed{g = g_x = 0 \text{ und } g_y \neq 0}$

$$\Longrightarrow y' = -\frac{g_x}{g_y} = 0 \Longrightarrow$$

Kandidat für Min/Max $y(x)$

$y' = 0$ bedeutet **horizontale Tangente** an Kurve

Mit $g(x, y) = 0$ und $g_x(x, y) = 0$ folgt außerdem

$$y'' = \frac{-g_{xx} \cdot g_y^2 + 2\,\cancel{g_{xy} \cdot \overset{0}{g_x}} \cdot g_y - \cancel{g_{yy} \cdot \overset{0}{g_x^2}}}{g_y^3} = -\frac{g_{xx}}{g_y}$$

Also hat man für

$$\frac{g_{xx}}{g_y} > 0 \Longrightarrow \text{lokales Maximum von } y$$

und für

$$\frac{g_{xx}}{g_y} < 0 \Longrightarrow \text{lokales Minimum von } y$$

- Vertausche Rollen von x und y:

$$\boxed{g = g_y = 0 \text{ und } g_x \neq 0}$$

$\Longrightarrow$ **vertikale Tangente** an Kurve

$\frac{dx}{dy} = 0$

$\frac{dx}{dy} = -\frac{g_y}{g_x}$

(lokal) minimaler/maximaler $x-$Wert

Ein Punkt (x_0, y_0) mit $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ und/oder $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ heißt **regulärer Punkt**

- $g = g_y = g_x = 0$: Der punkt (x_0, y_0) heißt **singulärer Punkt**

$\binom{x_0}{y_0}$ auf Kurve

singulärer Punkt

Im singulären Punkt gilt

$$g(x,y) \approx T_2(x,y) = \overset{0}{g(x_0,y_0)} + \overset{0}{g_x(x_0,y_0)}(x-x_0) + \overset{0}{g_y(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

$$+ \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}^T Hg(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{xx}(x_0,y_0) & g_{xy}(x_0,y_0) \\ g_{yx}(x_0,y_0) & g_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2!}\boldsymbol{v}^T\, Hg(x_0,y_0)\, \boldsymbol{v}$$

$\det Hg(x_0,y_0) > 0 \implies \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

Hessematrix positiv definit oder negativ definit.

Von (x_0,y_0) aus geht es mit den Werte von g in allen Richtungen auf-/abwärts!

isolierter Punkt

$v^T H v > 0$

$\forall \vec{v} \neq 0$

$g(x,y) \approx \frac{1}{2} v^T H v > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

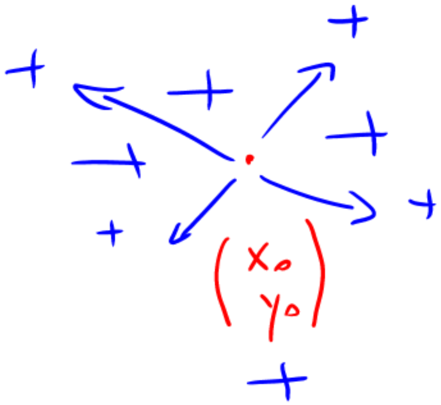
z.B.

$$v^T H v = v^T \lambda_1 v$$

$$= \lambda_1 v^T v$$

$$= \lambda_1 \|v\|_2^2$$

$=$



$\det Hg(x_0, y_0) < 0 \implies \underset{-}{\lambda_1} \cdot \underset{+}{\lambda_2} < 0$

EW$_1 < 0$ $\quad v^{[1]}$ EV

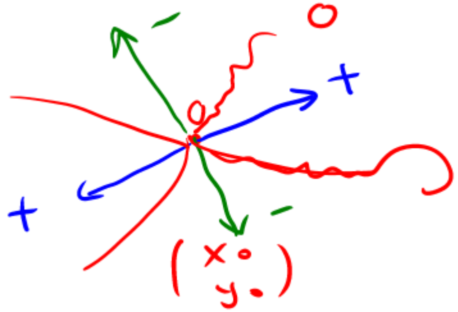
EW$_2 > 0$ $\quad v^{[2]}$ EV

Hessematrix indefinit.

Von (x_0, y_0) aus geht es mit den Werte von g in einer Richtung aufwärts und in eine Richtung abwärts!

$v^{[1]T} H v^{[1]} = \lambda_1 \|v^{[1]}\|_2^2 < 0$

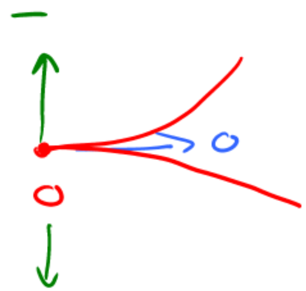
$v^{[2]T} H v^{[2]} = \lambda_2 \|v^{[2]}\|_2^2 > 0$



Doppelpunkt

$Hg(x_0, y_0) \neq$ Nullmatrix und $\det Hg(x_0, y_0) = 0 \implies \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$

Von (x_0, y_0) aus geht es mit den Werte von g in einer Richtung auf- oder abwärts und in einer Richtung tut sich (lokal) nichts!



Spitze / Rückkehrpunkt

Beispiel 1.

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 - 4x \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x - 4 \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{array}{cc} g_{xx} & g_{xy} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} g_{xy} & g_{yy} \end{array}$$

vert. Tangente: $g_y = 0$

$y(x-1) = 0$ → $y = 0$, $x = 1$

$y = 0$

$g(x, 0) = 0 + x^2(x-2) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$

$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ isol. Pkt

$g_x(2, 0) = 0^2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \neq 0$

$g_x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow$ sing. Pkt

$g_y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

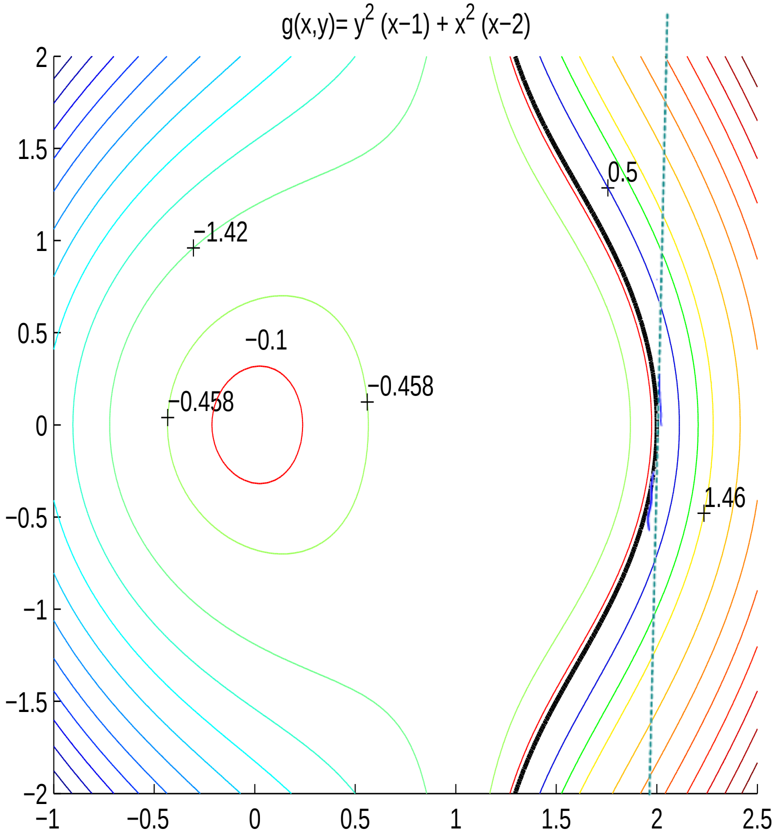
$x = 1$

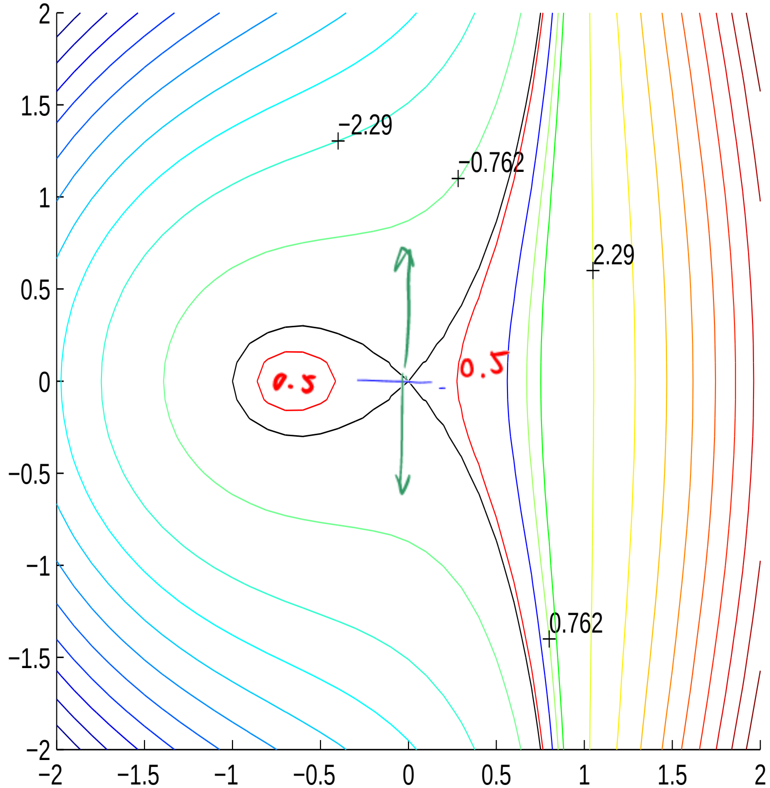
$g(1, y) = 1^2(1-2) \neq 0$

kein Punkt der Kurve

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein isolierter Punkt. □

$\Rightarrow$ $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ vert. Tang


g(x,y)= y^2 (x−1) + x^2 (x−2)
0.5
−1.42
−0.1
−0.458
−0.458
1.46


−2.29
−0.762
2.29
0.5
0.5
0.762

Beispiel 2.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x+q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned}
g_x &= y^2 + 3x^2 + 2xq^2 \\
g_y &= 2y(x-1) \\
g_{xx} &= 6x + \underline{2q}^2 \\
g_{xy} &= 2y \\
g_{yy} &= 2(x-1) \\
\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2q^2 > 0$

$v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2$

$v^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ für $\underline{q \neq 0}$ ein Doppelpunkt. □

Beispiel 3.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

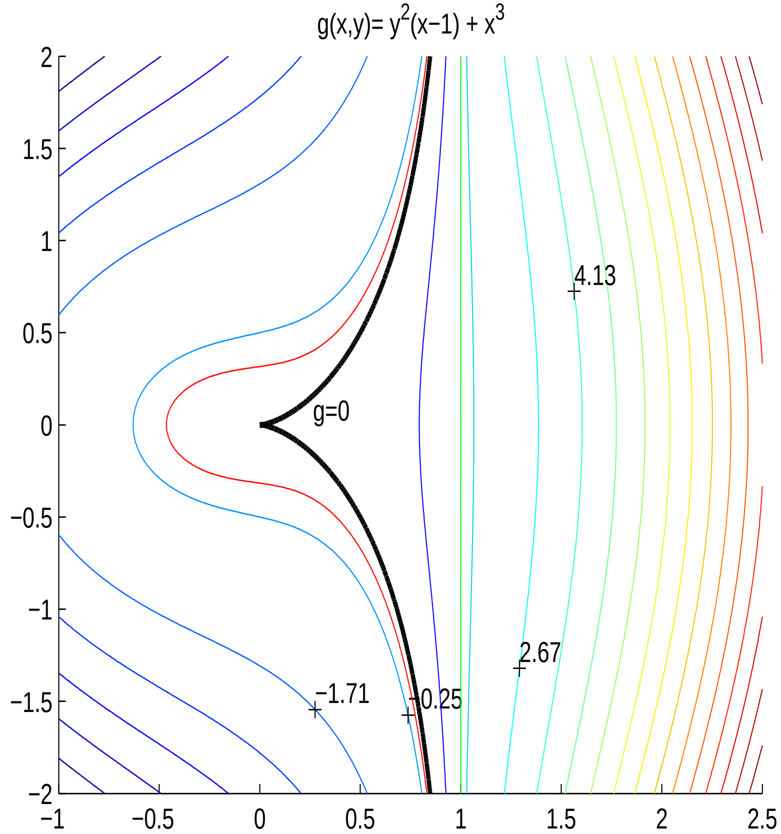
$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x \quad = 0 \\ g_{xy} &= 2y \quad = 0 \\ g_{yy} &= 2(x-1) \quad = -2 \\ \mathbf{H}_g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} g\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= 0 \\ g_x\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= 0 \\ g_y\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{sing. Pkt}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 \neq 0$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine Spitze (bzw. Rückkehrpunkt). □



$g(x,y)= y^2(x-1) + x^3$
g=0
4.13
2.67
−1.71
−0.25
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Implizite Darstellung von Flächen.

$x^2+y^2+z^2-16=0$

Das große rote Betzenherz.

$$g(x,y,z) := 10(2x^2+y^2+z^2-1)^3 - x^2z^3 - 10y^2z^3 = 0$$

Siehe Homepage Fachbereich Mathematik, TU Kaiserslautern:

`http://www.mathematik.uni-kl.de`

Auflösbarkeit nach einer Variablen im $\mathbb{R}^3$: $g(x,y,z)=0$

Satz über implizite Funktionen sagt aus:

Falls $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ und z.B. $\boldsymbol{J}g_z$ regulär,

dann gibt es f mit $g(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y)$

und

$$(z_x, z_y) = -(\boldsymbol{J}g_z)^{-1} \cdot \boldsymbol{J}g_{x,y}$$

Dabei ist $\boldsymbol{J}g = \left(\underbrace{g_x \quad g_y}_{\partial g_{xy}} \;\Big|\; \underbrace{g_z}_{\partial g_z} \right)$

Also $(z_x, z_y) =$

$$-\underbrace{(g_z)^{-1}}_{\frac{1}{g_z}} \left(g_x \quad g_y \right) = \left(-\frac{g_x}{g_z} \;,\; -\frac{g_y}{g_z} \right)$$

$$T_{2,f}(x,y) = z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Betrachte Fläche $g(\boldsymbol{x}) = g(x, y, z) = 0$ mit Lösungspunkt $g(\boldsymbol{x}_0) = g(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Dann gilt auf der Fläche mit einem $\boldsymbol{z}$ zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}_0$

$$
\begin{aligned}
0 = g(x, y, z) &= \overset{0}{g(x_0, y_0, z_0)} \\
&\quad + g_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T Hg(\boldsymbol{z}) \, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Tangentialebene:

$$
T(x, y, z) = \operatorname{grad} g \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0
$$

Zur impliziten Darstellung von Flächen.

- Die Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ist für $\text{grad}(g) \neq \mathbf{0}$ *lokal* eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

- Für die Tangentialebene in $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T$ mit $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und $\text{grad}(g)(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ bekommen wir für $\Delta\mathbf{x}^0 := \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ mit Taylor-Entwicklung

$$\text{grad}(g) \cdot \Delta\mathbf{x}^0 = g_x(\mathbf{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathbf{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathbf{x}^0)(z - z_0) = 0$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$.

- Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0) \neq 0$, so gibt es lokal um $\mathbf{x}^0$ eine Darstellung der Form

$$z = f(x, y)$$

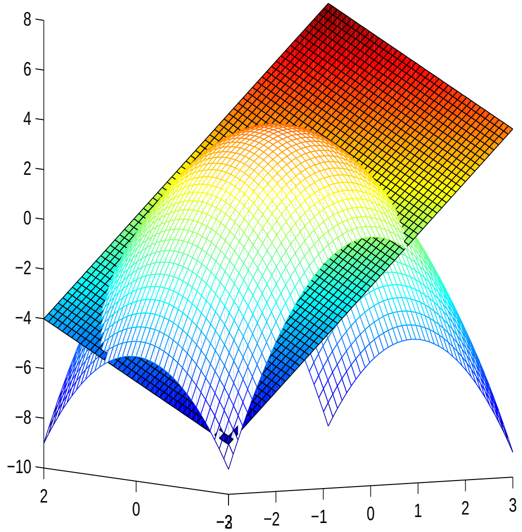
und für die **partiellen Ableitungen** von $f(x, y)$ bekommt man

$$\text{grad}(f)(x, y) = (f_x, f_y) = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y) = \left(-\frac{g_x}{g_z}, -\frac{g_y}{g_z}\right).$$

mit dem Satz über implizite Funktionen.

Zwei Gleichungen im $\mathbb{R}^3$, zum Beispiel

$$g_1(x,y,z) \;=\; 4 - x^2 - y^2 - z \;=\; 0, \qquad g_2(x,y,z) \;=\; 2x + y - z \;=\; 0$$



$$Jg = \begin{pmatrix} (g_1)_x & \underbrace{\begin{matrix}(g_1)_y & (g_1)_z \\ (g_2)_y & (g_2)_z\end{matrix}}_{Jg_{y,z}} \\ (g_2)_x & \end{pmatrix}$$

$Jg_{y,z}$ regulär in (x_0, y_0, z_0)

$\Longrightarrow \exists f$ mit

$\vec{g}(x,y,z) = 0 \iff \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = f(x)$

Kurve im $\mathbb{R}^3$ zum Beispiel $\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ mit

$$\underline{\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x)} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\left(\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_{y,z}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_x$$

hier

$$\partial g = \begin{pmatrix} -2x & \underbrace{\begin{matrix} -2y & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{\substack{y = -1/2 \text{ singulär} \\ y \neq -1/2 \text{ regulär}}} \\ 2 & \end{pmatrix}$$

Das Umkehrproblem

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach $\mathbf{x}$ auflösen, also **invertieren**?

Satz (Umkehrsatz)**:** *Sei* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine* C^1*-Funktion. Ist für ein* $\mathbf{x}^0 \in D$ *die Jacobi-Matrix* $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ *regulär, so gibt es Umgebungen* U *und* V *von* $\mathbf{x}^0$ *und* $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$*, so dass* $\mathbf{f}$ *den Bereich* U ***bijektiv*** *auf* V *abbildet.*

Die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ *ist ebenfalls eine* C^1*-Funktion, und es gilt für alle* $\mathbf{x} \in U$

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Beweis: Wende auf $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ den Satz über implizite Funktionen an. □

Bemerkung: Man nennt dann $\mathbf{f}$ lokal einen C^1-Diffeomorphismus. □