Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg WiSe 2014/15

Dr. Hanna Peywand Kiani

Vorlesungsvertretung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Vorlesung 6/7: Extrema unter Nebenbedingungen, Lagrange Multiplikatoren

21/28.11.2014

Optimierung mit Gleichungsnebenbedingungen

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{g} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,\ f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \in, \mathbb{R}$$

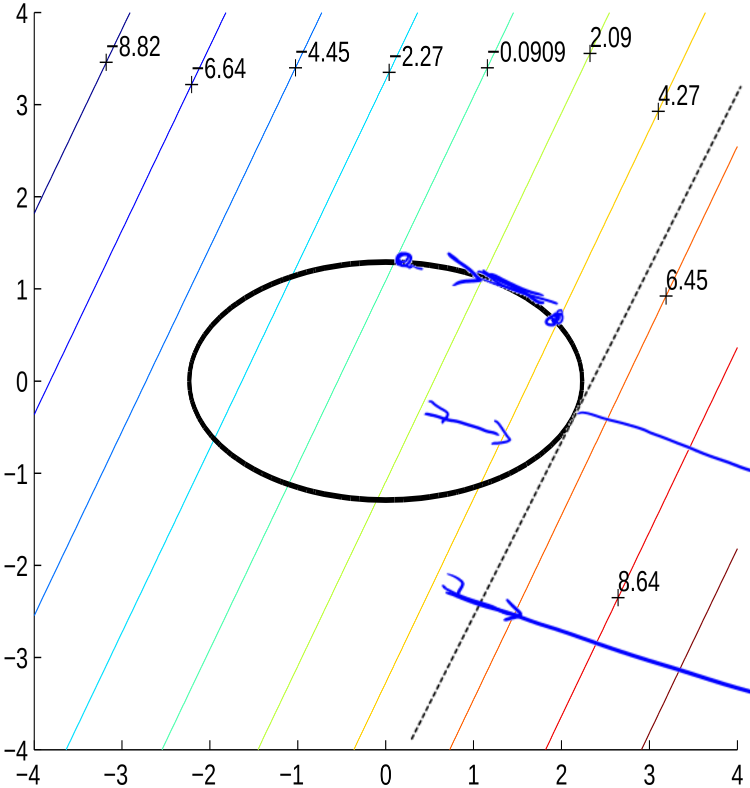
Problem: Zielfunktion $\boxed{f(\boldsymbol{x}) = \text{min/max !}}$

unter der(den) **Nebenbedigung(en)**

$$\boxed{g(\boldsymbol{x}) = 0}$$

Folien 90-91: Minimale Oberfläche einer zylindrischen Dose bei vorgegebenem Volumen (vgl. Anleitung 1)

Beispiel: $f(x,y) := 1 + 2x - y \overset{!}{=} \max$
unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4 = 0.$

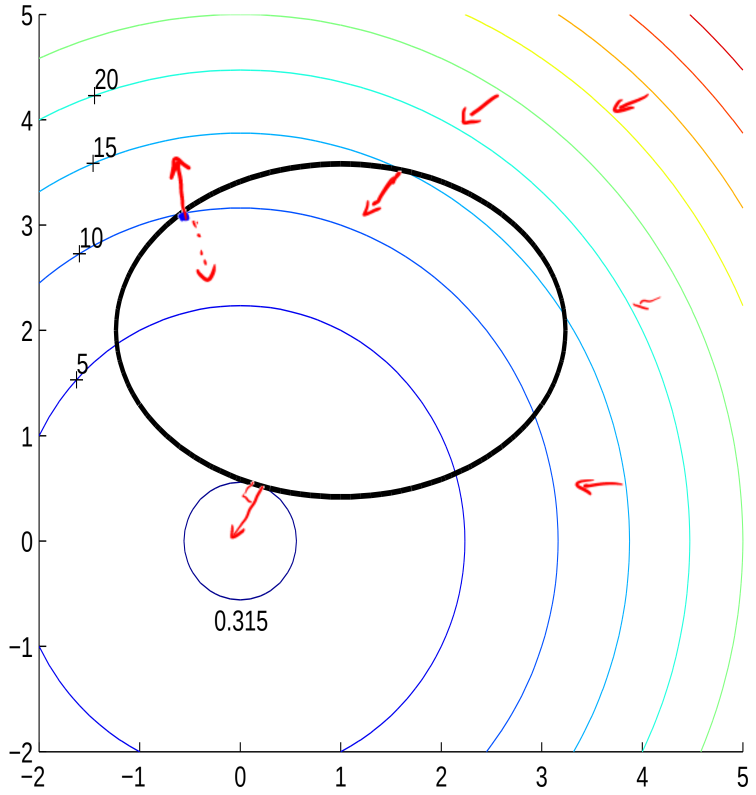


grad g

grad f

Beispiel: $f(x,y) := x^2 + y^2 \overset{!}{=} \min$

unter der Nebenbedingung $\quad g(x,y) = (x-1)^2 + 2(y-2)^2 - 4 = 0.$



$$\vec{v} = \mu \vec{w}$$

$$\vec{v} + \lambda \vec{w} = 0$$

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \lambda \operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0$$

Beobachtung: Im Min/Max $\boldsymbol{x}_0$ muss gelten $\mathbf{grad}\, f(\vec{\boldsymbol{x}}_0) + \lambda\, \mathbf{grad}\, g(\vec{\boldsymbol{x}}_0) \;=\; 0$

Im allgemeinen Fall (m Nebenbdingungen) erhalten wir unten

$$\boxed{\mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \mathbf{grad}\, g_k(\boldsymbol{x}_0) \;=\; 0\,.}$$

$$\mathrm{grad}\left(f + \sum \lambda_k g_k\right) = 0$$

Oder mit $F(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, g_k(\boldsymbol{x})$:

$$\mathbf{grad}\, F(\boldsymbol{x}_0) = \; 0, \qquad g_k(\boldsymbol{x}_0) = 0 \;\text{ für }\; k = 1, 2, \ldots, m$$

Allgemeine Formulierung des Problems.

Bestimme die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,$$

wobei $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Die Nebenbedingungen lauten also

$$\begin{array}{rcl} g_1(x_1, \dots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ g_m(x_1, \dots, x_n) & = & 0 \end{array}$$

Alternativ: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Die Lagrange-Funktion und das Lagrange-Lemma.

Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\boxed{F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})} \qquad \text{für } \mathbf{x} \in D$$

$F = f + \vec{\lambda}^T \vec{g}$

$(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m) \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$

und suchen die Extremwerte von $F(\mathbf{x})$ für *festes* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$. $= \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m$

Die Zahlen λ_i, $i = 1, \ldots, m$ nennt man Lagrange-Multiplikatoren.

Satz: (Lagrange-Lemma): *Minimiert (bzw. maximiert)* $\mathbf{x}^0 \in D$ *die Lagrange-Funktion* $F(\mathbf{x})$ *(für ein festes* λ*) über* D *und gilt* $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = 0$, *so liefert* $\mathbf{x}^0$ *das Minimum (bzw. Maximum) von* $f(\mathbf{x})$ *über* $G := \{\mathbf{x} \in D \,|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Beweis: Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in D$ gilt nach Voraussetzung

$$F(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + \lambda^T \overset{0}{\cancel{\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)}} \leq f(\mathbf{x}) + \lambda^T \overset{0}{\cancel{\mathbf{g}(\mathbf{x})}} = F(\mathbf{x})$$

Wählt man speziell $\mathbf{x} \in G$, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, also auch $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x})$. ■

Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Sind f und g_i, $i = 1, \ldots, m$, C^1-Funktionen, so ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle $\mathbf{x}^0$ von $F(\mathbf{x})$ gegeben durch

$$\operatorname{grad}(F)(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}(f)(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}(g_i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

$F_{x_1} = 0$
$F_{x_2} = 0$
$\vdots$
$F_{x_n} = 0$

Zusammen mit den Nebenbedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ergibt sich ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit $(n+m)$ Gleichungen und $(n+m)$ Unbekannten $\mathbf{x}$ und λ.

Die Lösungen $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ sind geeignete Kandidaten für die gesuchten Extremstellen, denn diese erfüllen die o.g. notwendige Bedingung.

$g_1 = 0$
$g_2 = 0$
$\vdots$
$g_m = 0$

Alternativ: Definiere eine Lagrange-Funktion

$$G(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suche die Extremstellen von $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich $\mathbf{x}$ **und** λ.

Bemerkung.

Man kann auch eine **hinreichende** Bedingung aufstellen:

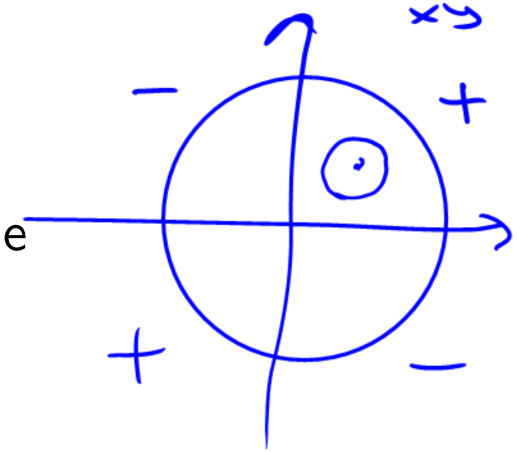
Sind die Funktionen f und $\mathbf{g}$ C^2-Funktionen und ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange-Funktion positiv (bzw. negativ) definit, so ist $\mathbf{x}^0$ tatsächlich ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ auf G.

In den meisten Anwendungen ist die hinreichende Bedingung allerdings **nicht** erfüllt, obwohl $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Extremum ist.

Insbesondere kann man aus der Indefinitheit der Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ **nicht** schließen, dass $\mathbf{x}^0$ kein Extremwert ist.

Ähnlich problematisch ist die hinreichende Bedingung, die man aus der Hesse-Matrix für die Lagrange-Funktion $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich **$\mathbf{x}$ und** λ erhält.

Beispiel.



Gesucht seien die Extrema von $f(x, y) := xy$ auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x, y)^T \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Da die Funktion f stetig und $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, folgt die Existenz von globalen Maxima und Minima von f auf K.

Wir betrachten zunächst das Innere K^0 von K, also die *offene* Menge

$$K^0 := \{(x, y)^T \,|\, x^2 + y^2 < 1\}.$$

$$\operatorname{grad} f = (y \quad x) \stackrel{!}{=} (0 \quad 0)$$

Die notwendige Bedingung für einen Extremwert lautet nun

$$\operatorname{grad}(f) = (y, x) = \mathbf{0}. \qquad \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist der Ursprung $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ Kandidaten für ein (lokales) Extremum.

Fortsetzung des Beispiels.

$f_x = y$ $\quad$ $f_y = x$

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ im Ursprung, gegeben durch

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(\vec{0}) = -1 < 0$

$\lambda^2 - 1 = 0$ $\quad$ $\lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist **indefinit**. Daher ist $\mathbf{x}^0$ ein **Sattelpunkt**.

Die Extrema der Funktion müssen also auf dem Rand liegen, der eine **Gleichungsnebenbedingung** darstellt:

$\lambda = -1$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0}$$

Wir suchen also die Extremwerte von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$f + \lambda \cdot g$

Komplettierung des Beispiels.

Damit ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem

$F_x = 0$

$F_y = 0$

$g = 0$

$$\begin{aligned} y + 2\lambda x &= 0 \\ x + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

mit den vier Lösungen

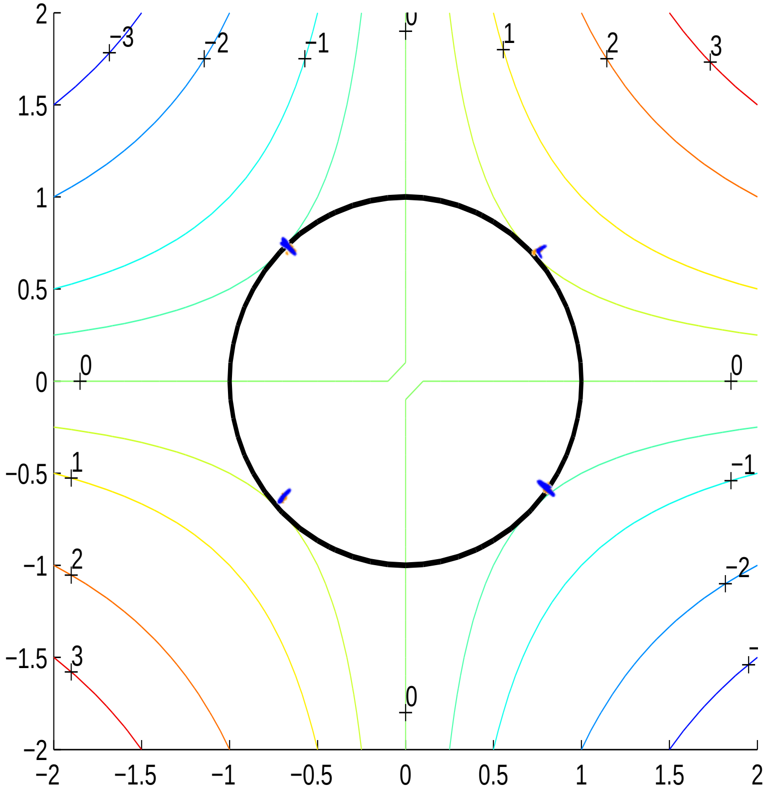
$$\lambda = \frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})^T \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})^T$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(3)} = (\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})^T \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})^T$$

Minima und Maxima lassen sich nun einfach aus den Funktionswerten ablesen:

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = -1/2 \qquad f(\mathbf{x}^{(3)}) = f(\mathbf{x}^{(4)}) = 1/2$$

d.h. Minima sind $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$, Maxima sind $\mathbf{x}^{(3)}$ und $\mathbf{x}^{(4)}$. $\square$



2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
−3
−2
−1
0
1
2
3
0
0
1
−1
2
−2
3
0

$g(x,y)=0$

Die Lagrange-Multiplikatoren-Regel.

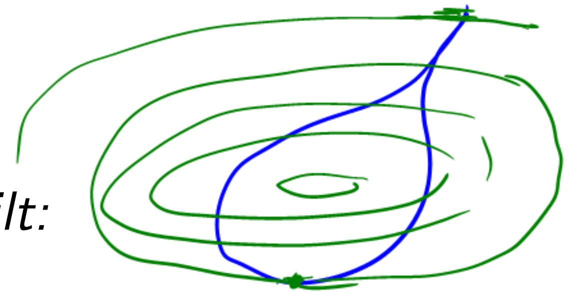
Satz: *Seien* $f, g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$ *jeweils* C^1*-Funktionen, und sei* $\mathbf{x}^0 \in D$ *ein lokales Extremum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$*. Weiterhin gelte die* Regularitätsbedingung

$(g_x \quad g_y) = (0 \quad 0)$

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{J}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\right) = m.$$

Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$*, so dass für die* Lagrange-Funktion

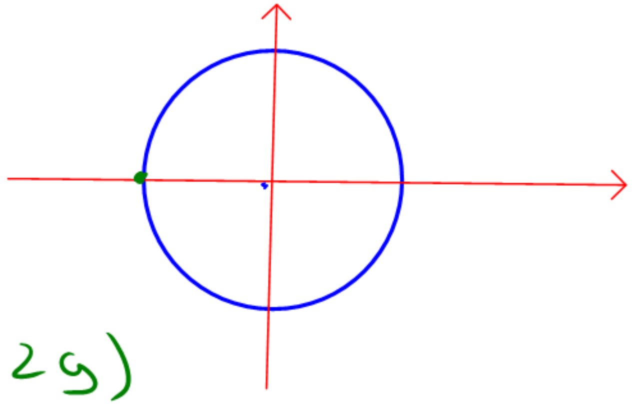
$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$



die folgende **notwendige Bedingung erster Ordnung** *gilt:*

$$\operatorname{grad}(F)(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Bsp: $f(x) = x^3 \overset{!}{=} \min$



$$g(x) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$Jg(x,y) = (g_x \quad g_y) = (2x, 2y)$$

$$\operatorname{rang} Jg(x,y) = 1 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ egal da nicht zulässig

$$F = f + \lambda g = x^3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$F_x = 0$ $\quad 3x^2 + \lambda \cdot 2x = 0$ $\quad \longrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$F_y = 0$ $\quad 2\lambda y = 0 \iff \boxed{(\lambda = 0 \ \vee \ y = 0)}$

$g = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 1 = 0$ $\quad$ III

$\lambda = 0$

$x = 0$

III $\quad y = \pm 1$

$y = 0$

III $\quad x = \pm 1$

I $\quad 3 \pm 2\lambda = 0$ $\quad \lambda = \mp 3/2$

$$p_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 0$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = -3/2$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = +3/2$$

$$F_x = 3x^2 + 2\lambda x \qquad F_y = 2\lambda y$$

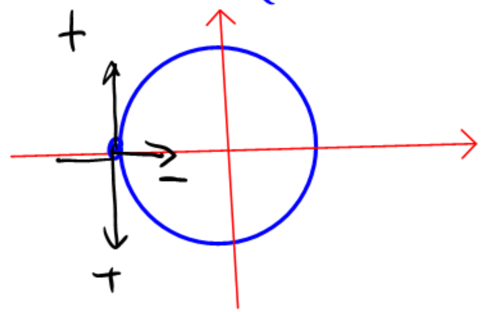
$$HF = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_4 : \quad H(p_4) = \begin{pmatrix} -6+3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$? \qquad \lambda > 0 \qquad v^T H v > 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Notwendige Bedingung zweiter Ordnung.

Satz: *Ist* $\mathbf{x}^0 \in D$ *ein lokales Minimum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$, *ist die Regularitätsbedingung erfüllt und sind* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *zugehörige Lagrange-Multiplikatoren, so ist die Hesse-Matrix* $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ *der Lagrange-Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum*

$$\boxed{\mathbf{T}G(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{grad}(g_i)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0 \textit{ für } i = 1, \ldots, m\}}$$

d.h., es gilt

$$\underline{\mathbf{y}^T \, \mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0) \, \mathbf{y} \geq 0} \qquad \textit{für alle } \mathbf{y} \in \mathbf{T}G(\mathbf{x}^0).$$

□

Hinreichende Bedingung.

Satz: *Ist für einen Punkt* $\mathbf{x}^0 \in G$ *die Regularitätsbedingung erfüllt, existieren Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *so dass* $\mathbf{x}^0$ *ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange-Funktion ist, und ist die Hesse-Matrix* $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ *positiv definit auf dem Tangentialraum*

$$\mathbf{T}G(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{grad}(g_i)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\boxed{\mathbf{y}^T \, \mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0) \, \mathbf{y} > 0} \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbf{T}G(\mathbf{x}^0) \setminus \{0\},$$

so ist $\mathbf{x}^0$ *ein strenges lokales Minimum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. □

Beispiel.

Man bestimme das globale Maximum der Funktion

$$f(x, y) = -x^2 + 8x - y^2 + 9$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$F(x) = -x^2 + 8x - y^2 + 9 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Aus der notwendigen Bedingung ergibt sich das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Aus der notwendigen Bedingung ergibt sich das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq 1$. Verwendet man dies in der zweiten Gleichung, so gilt $y = 0$. Aus der dritten Gleichung erkennt man sofort $x = \pm 1$.

Demnach sind nur die beiden Punkte $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (-1, 0)$ Kandidaten für das globale Maximum. Wegen

$$f(1, 0) = 16 \qquad \text{und} \qquad f(-1, 0) = 0$$

wird das globale Maximum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ im Punkt $(x, y) = (1, 0)$ angenommen. $\square$

Noch ein Beispiel.

Bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$$

auf dem Schnitt des Zylinders

$$Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 2\}$$

mit der Ebene

$$E := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = 1\}$$

Umformulierung: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &:= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x, y, z) &:= x + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

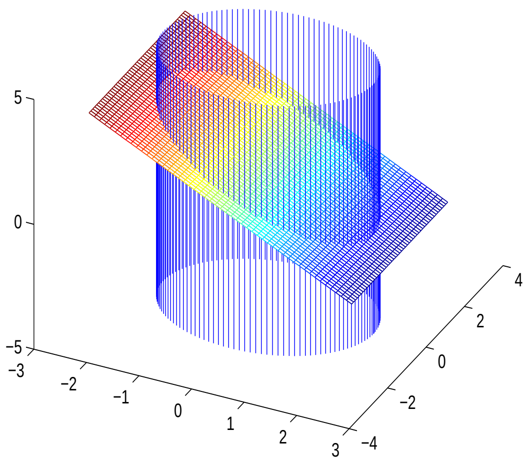
$$f(x,y,z) = 2x + 3y + 2z$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g_1(x,y,z) \quad = \quad x^2 + y^2 - 2 \quad = \quad 0$$

mit der Ebene

$$g_2(x,y,z) \quad = \quad x + z - 1 \quad = \quad 0.$$



$g_1 : \; x^2 + y^2 - 2$

$g_2 = x + z - 1$

Fortsetzung des Beispiels.

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x = 0 \\ \to y = 0 \\ \to \alpha = 0 \end{matrix} \Big\} \text{ nicht zuläss.}$$

Die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } g_1 \\ \text{grad } g_2 \end{pmatrix}$$

hat den maximalen Rang 2 ☆, d.h. wir können über die Lagrange-Funktion Extremwerte bestimmen:

☆ auf der zulässigen Menge

$$F(x, y, z) = \underbrace{2x + 3y + 2z}_{f} + \lambda_1 (\underbrace{x^2 + y^2 - 2}_{g_1}) + \lambda_2 (\underbrace{x + z - 1}_{g_2})$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
F_x = 0 \qquad & 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\
F_y = 0 \qquad & 3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\
F_z = 0 \qquad & 2 + \lambda_2 &= 0 \\
g_1 = 0 \qquad \text{IV} \qquad & x^2 + y^2 &= 2 \\
g_2 = 0 \qquad \text{V} \qquad & x + z &= 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$2\lambda_1 x = 0 \Rightarrow \cancel{\boxed{\lambda_1 = 0}} \lor x = 0$

$3 + 0 = 0$ ↯ also $\boxed{x = 0}$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

$$\boxed{x = 0}$$
$$\lambda_2 = -2$$
$$\mathrm{V}: \boxed{z = 1}$$
$$\mathrm{IV}: \boxed{y = \pm\sqrt{2}}$$
$$\mathrm{II}: \lambda_1 = -\frac{3}{2y}$$

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\ 3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\ 2 + \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$2\lambda_1 x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $x = 0$.

Damit ergeben sich die möglichen Extremwerte als

$$\boxed{(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \qquad \text{und} \qquad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1).}$$

Komplettierung des Beispiels.

Die möglichen Extremwerte sind also

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \qquad \text{und} \qquad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1).$$

Man berechnet nun die zugehörigen Funktionswerte

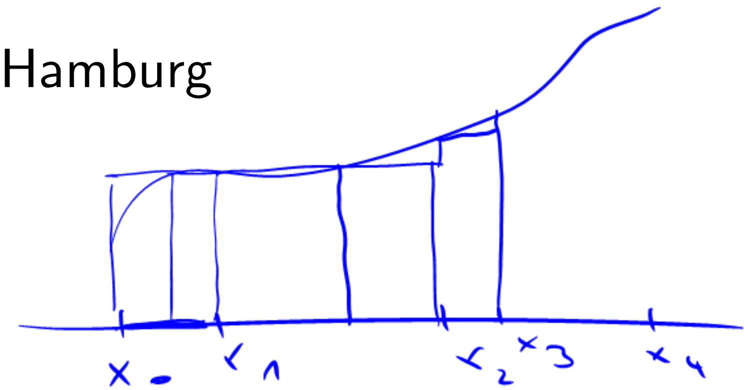
$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{2}, 1) &= 3\sqrt{2} + 2 \\ f(0, -\sqrt{2}, 1) &= -3\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Daher liegt im Punkt $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$ ein Maximum, im Punkt $(x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$ ein Minimum. $\square$

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg



Technische Universität Hamburg-Harburg

Wintersemester 2014/2015

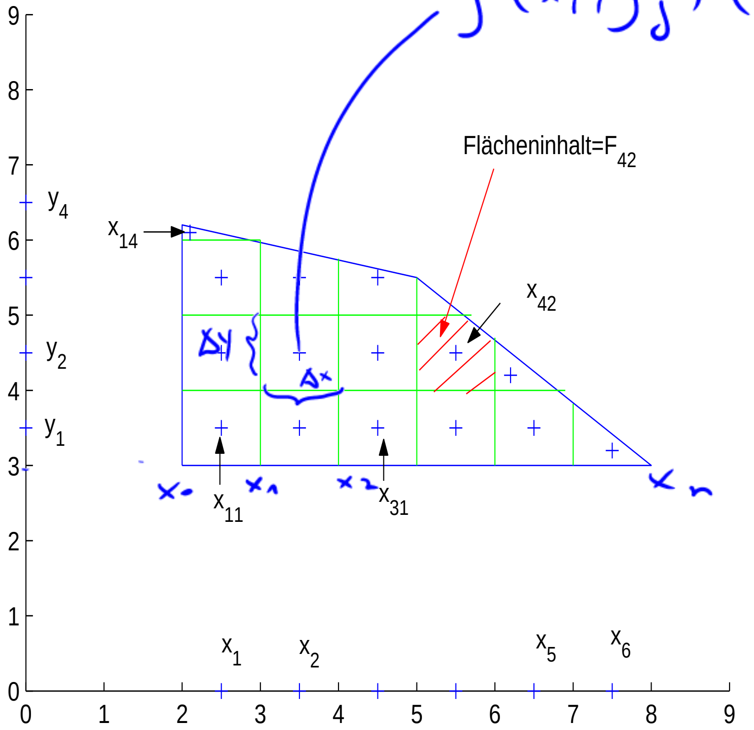
Bereichsintegrale :

Beispiel: Gegeben Dichte $\rho(x, y)$. Gesucht Masse.

Näherung : dichte konstant auf jedem Kästchen $\longrightarrow$

$$M \approx \sum_i \sum_j \rho(x_i, y_j)\, F_{ij}$$

$\rho(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{j+1} - y_j)$



19 Integralrechnung mehrerer Variabler

19.1 Bereichsintegrale

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von $f(\mathbf{x})$:

$$V = \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Erinnerung Analysis II: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober- und Untersumme definiert, falls diese Grenzwerte jeweils existierten und übereinstimmten. $\square$

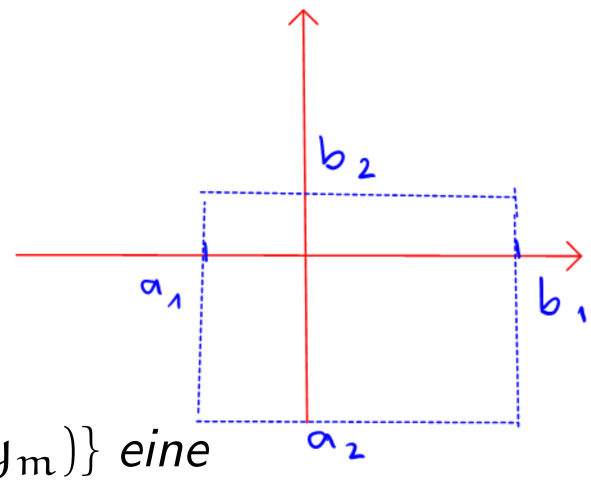
Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale.

Vorgehensweise: Analog dem eindimensionalen Fall.

Aber: der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Startpunkt: Betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$\boxed{D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2,}$$

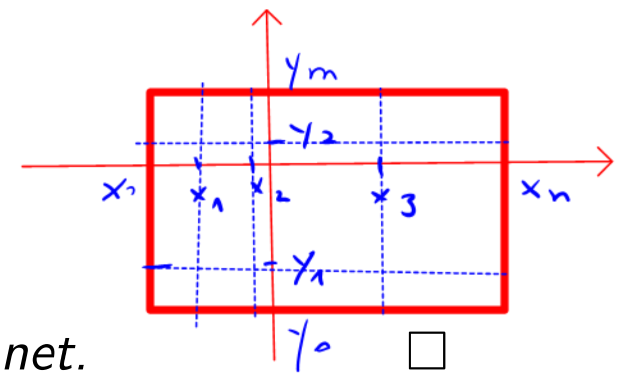


d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck).

Weiterhin sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition: *Man nennt* $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ *eine* Zerlegung *des Quaders* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, *falls gilt*

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & x_0 < x_1 < \ldots < x_n & = & b_1 \\ a_2 & = & y_0 < y_1 < \ldots < y_m & = & b_2 \end{array}$$



Mit $\mathbf{Z}(D)$ *wird die* Menge der Zerlegungen *von* D *bezeichnet.* □

Zerlegungen und Riemannsche Summen.

Definition:

- Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\|Z\| := \max_{i,j}\{\underline{|x_{i+1} - x_i|}, \underline{|y_{j+1} - y_j|}\}$$

- Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z. Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

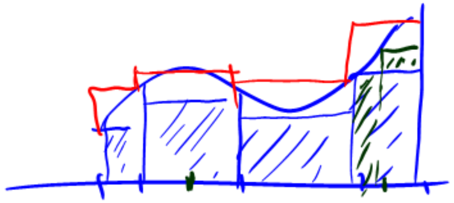
$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

- Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z. $\square$

Riemannsche Ober- und Untersummen.



Definition: *Analog zum Integral einer Variablen heißen für eine Zerlegung Z*

$$U_f(Z) \quad := \quad \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) \quad := \quad \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

die `Riemannnsche Untersumme` *bzw.* `Riemannsche Obersumme` *von* $f(\mathbf{x})$. □

Bemerkung: Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter- und Obersumme dieser Zerlegung, d.h. es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

□

Bemerkung.

Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j, so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \qquad \text{und} \qquad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

Frage: Was passiert mit den Unter- und Obersummen im Grenzwert $\|Z\| \to 0$:

$$\begin{aligned} U_f &:= \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \\ O_f &:= \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \end{aligned}$$

Beobachtung: Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter- und Obersumme monoton und beschränkt sind. $\square$

Riemannsche Ober- und Unterintegrale.

Definition:

- Riemannsches Unterintegral bzw. Riemannsches Oberintegral der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D ist gegeben durch

$$\int_{\underline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad := \quad \sup\{U_f(Z)\,|\,Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

$$\int_{\overline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad := \quad \inf\{O_f(Z)\,:\,Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

- Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man Riemann-integrierbar über D, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann-Integral von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann gegeben durch

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_{\underline{D}} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\overline{D}} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

$\square$

Bemerkung.

Wir haben bis jetzt "nur" den Fall von **zwei** Variablen betrachtet:

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad D \subset \mathbb{R}^2.$$

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: für $n = 2$ und $n = 3$

$$\int_D f(x,y)\,\underbrace{dxdy}_{d(x,y)} \qquad \text{bzw.} \qquad \int_D f(x,y,z)\,\underbrace{dxdydz}_{d(x,y,z)}$$

oder auch

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{bzw.} \qquad \int\int\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

□

Elementare Eigenschaften des Integrals.

Satz:

- Linearität

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

- Monotonie

  Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

- Positivität

  Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) \geq 0$, d.h. $f(\mathbf{x})$ ist nichtnegativ, so folgt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq 0$$

□

Weitere Eigenschaften des Integrals.

$\int_{I_1} f\,dx + \int_{I_2} dx$

Satz: $I_1 \; I_2$

- Sind D_1, D_2 und D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist f(**x**) genau dann über D integrierbar, falls f(**x**) über D_1 und über D_2 integrierbar ist, und es gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

a b c

$I_1 \quad I_2$

$I_1 \quad I_2$

$I_1 \quad I_2$

- Für das Integral gilt die Abschätzung

$$\left| \int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{\mathbf{x}\in D} |f(\mathbf{x})| \cdot \mathrm{vol}(D)$$

- Riemannsches Kriterium

  f(**x**) ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

□

Der Satz von Fubini.

Satz (Satz von Fubini): *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *ein Quader, und existieren die Integrale*

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \qquad \textit{und} \qquad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ *bzw. für alle* $y \in [a_2, b_2]$*, so gelten*

$$\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \boxed{\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy}\,dx$$

$$\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \boxed{\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx}\,dy$$

Bedeutung:

Der Satz von Fubini ermöglicht Reduktion auf eindimensionale Integration. □

Bsp: $D = \underbrace{[0,\pi]}_{x} \times \underbrace{[-1,3]}_{y}$ $\qquad f(x,y) = \sin(x)\cdot y^2$

$$\int_{\underset{x}{\uparrow}0}^{\pi} \left[\int_{\underset{y}{\uparrow}-1}^{3} f(x,y) \, dy \right] dx = \int_0^{\pi} \underbrace{\int_{-1}^{3} \sin(x) y^2 \, dy}\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{3} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) \left[\frac{27}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] dx$$

$$= \frac{28}{3} \left(-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{28}{3}\Big[\underbrace{-\cos(\pi)}_{1} \underbrace{-(-\cos 0)}_{+1}$$

$$\int_{-1}^{3} \left\{ \int_{\underset{x}{\uparrow}0}^{\pi} \sin(x)\, y^2 \, \underset{\uparrow}{dx} \right\} dy = \int_{-1}^{3} y^2 \underbrace{(-\cos x)\Big|_0^{\pi}}_{2} dy$$

$$\int_{-1}^{3} 2y^2 \, dy = \frac{2}{3} y^3 \Big|_{-1}^{3} = \frac{56}{3}$$

Beweis des Satzes von Fubini: Sei $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ eine beliebige Zerlegung von D, so gelten für beliebige $y \in [y_j, y_{j+1}]$ und $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ die Abschätzungen

$$\inf_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \leq f(\xi_i, y) \leq \sup_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}),$$

und somit (per Integration über $[y_j, y_{j+1}]$)

$$\inf_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x})(y_{j+1} - y_j) \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\, dy \leq \sup_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x})(y_{j+1} - y_j).$$

Durch Multiplikation mit $(x_{i+1} - x_i)$ und anschließender Summation folgt

$$U_f(Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y)\, dy \right) (x_{i+1} - x_i) \leq O_f(Z).$$

Mit dieser Riemannschen Summe von $F(x)$ zu $Z_x = \{x_0, \ldots, x_n\}$ bekommt man

$$U_f(Z) \leq U_F(Z_x) \leq O_F(Z_x) \leq O_f(Z).$$

Für $\|Z\| \to 0$ folgt die erste Behauptung, die zweite zeigt man analog. ■

Beispiel.

Gegeben sei der Quader $D = [0,1] \times [0,2]$ sowie die Funktion

$$f(x,y) = 2 - xy$$

Stetige Funktionen sind – wie wir gleich zeigen werden – über Quadern integrierbar. Daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned} \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\, dx dy = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini verlangt als Voraussetzung die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht**! □

Die charakteristische Funktion.

Definition: *Für* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und* $f : D \to \mathbb{R}$ *beschränkt setzen wir*

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \quad \textit{falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \quad \textit{falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

Speziell für $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ *heißt* $f^*(\mathbf{x})$ *die* charakteristische Funktion *von* D. *Die charakteristische Funktion von* D *wird mit* $\chi_D(\mathbf{x})$ *bezeichnet.*

Sei nun Q *der kleinste Quader mit* $D \subset Q$. *Dann heißt die Funktion* $f(\mathbf{x})$ integrierbar *über* D, *falls* $f^*(\mathbf{x})$ *über* Q *integrierbar ist, und wir setzen*

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

$\square$

Messbarkeit und Nullmengen.

Definition: *Die kompakte Menge* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* messbar, *falls das Integral*

$$\mathrm{vol}(\mathrm{D}) := \int_{\mathrm{D}} 1\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{Q}} \chi_{\mathrm{D}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

existiert. Man nennt dann $\mathrm{vol}(\mathrm{D})$ *das* Volumen *von* D *im* $\mathbb{R}^n$*.*

Die kompakte Menge D *heißt* Nullmenge, *falls* D *messbar ist mit* $\mathrm{vol}(\mathrm{D}) = 0$. □

Bemerkungen:

- Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $\mathrm{Q} = \mathrm{D}$, und somit gilt

  $$\int_{\mathrm{D}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{Q}} f^*(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{Q}} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

  d.h. die eingeführten Integrationsbegriffe stimmen überein.

- Quader sind messbare Mengen.

- $\mathrm{vol}(\mathrm{D})$ ist in diesem Fall das *tatsächliche* Volumen des Quaders D im $\mathbb{R}^n$. □

Drei wichtige Eigenschaften der Integration.

Satz: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt. Dann ist* D *genau dann messbar, falls der Rand* ∂D *von* D *eine Nullmenge ist.* $\square$

Satz: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und messbar und sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $f(\mathbf{x})$ *integrierbar über* D. $\square$

Satz (Mittelwertsatz): *Ist* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt, zusammenhängend und messbar, und ist* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig, so gibt es einen Punkt* $\xi \in D$ *mit*

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot \text{vol}(D).$$

$\square$