Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2015/16**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{, falls } \quad (x,y) \neq (0,0), \\[2ex] 0 & \text{, falls } \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-0.05, 0.05] \times [-0.05, 0.05]$.

b) Man überprüfe, ob f stetig ist.

c) Man berechne $\boldsymbol{J} f(x,y)$.

d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

e) Sind die partiellen Ableitungen stetig?

Aufgabe 10:

a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} \mathbb{R}^3 \overset{\boldsymbol{f}_2}{\to} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix}.$$

b) Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$h : \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{g}{\to} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \mapsto g(u,v)\,.$$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{\Phi}\,(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 3r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $(r,\varphi) \in Q :=]0,1] \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}\,(r,\varphi)$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}\,(r,\varphi))$ sowie

b) $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x,y)$, $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x,y))$.

c) Man zeichne Q und $\boldsymbol{\Phi}\,(Q)$.

Aufgabe 12: (Klausur WiSe 2011/12)

Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades für die Funktion

$$f(x,y) = (y + \cos y)\sin x$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ verwendet, nach oben ab.

Abgabetermin: 16.11. - 20.11.2015 (zu Beginn der Übung)