

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2015/2016

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis III.

Differential- und Integralrechnung mehrerer Variabler:

- Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren.
- Vektorfelder, vollständiges Differential, Richtungsableitungen.
- Mittelwertsätze, Satz von Taylor.
- Extrema, Satz über implizite Funktionen.
- Implizite Darstellung von Kurven und Flächen.
- Extrema bei Gleichungsnebenbedingungen.
- Newton-Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Ausgleichsrechnung.
- Bereichsintegrale, Satz von Fubini, Transformationssatz.
- Potentiale, Integralsatz von Green, Integralsatz von Gauß.
- Greensche Formeln, Integralsatz von Stokes.

17 Differentialrechnung mehrerer Variabler

17.1 Partielle Ableitungen

Im folgenden sei

$f(x_1, \dots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt.

Beispiel: Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.

Jede der drei Größen, p (Druck), V (Volumen), T (Temperatur), lässt sich wie folgt als Funktion der anderen darstellen, wobei R die universelle Gaskonstante.

$$\begin{aligned} p &\equiv p(V, T) = \frac{RT}{V} \\ V &\equiv V(p, T) = \frac{RT}{p} \\ T &\equiv T(p, V) = \frac{pV}{R} \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in D$.

- $f(\mathbf{x})$ heißt in \mathbf{x}^0 nach x_i **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{t}\end{aligned}$$

existiert, wobei \mathbf{e}_i den i -ten Einheitsvektor bezeichnet. Den Grenzwert nennt man die **partielle Ableitung** von $f(\mathbf{x})$ nach x_i im Punkt \mathbf{x}^0 .

- Existieren für jeden Punkt $\mathbf{x}^0 \in D$ die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen x_i , $i = 1, \dots, n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(\mathbf{x})$ **stetig partiell differenzierbar** oder eine **C^1 -Funktion**.

□

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) = 2x_2$$

Die Funktion f ist also eine C^1 -Funktion.

- Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 ,
aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht!**



Konkretes technisches Beispiel.

Der Schalldruck einer eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x, t) = A \sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die **örtliche** Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die **zeitliche** Änderung des Schalldruckes. \square

Differentiationsregeln.

- Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2} \quad \text{für } g(\mathbf{x}) \neq 0$$

- Man verwendet alternativ die Bezeichnungen

$$D_i f(\mathbf{x}^0) \quad \text{oder} \quad f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$$

für die partielle Ableitung von $f(\mathbf{x})$ nach x_i in \mathbf{x}^0 .

□

Gradient und Nabla-Operator.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und partiell differenzierbar.

- Man bezeichnet den **Zeilenvektor**

$$\text{grad } f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)$$

als **Gradient** von $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 .

- Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

als **Nabla-Operator**.

- So bekommt man den **Spaltenvektor**

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)^T.$$

□

Weitere Differentiationsregeln. Seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden **Differentiationsregeln**.

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \text{grad} f + \beta \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad} f + f \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2} (g \cdot \text{grad} f - f \cdot \text{grad} g) \quad \text{für } g \neq 0$$

Beispiele:

- Sei $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\text{grad} f(x, y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y) = e^x (\sin y, \cos y)$$

- Für $r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ gilt

$$\text{grad} r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad \text{für } (\mathbf{x} \neq 0),$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ Zeilenvektor.

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist im Allgemeinen **nicht** stetig.

Gegenbeispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist auf **ganz** \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar, und es gilt

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Beispiel (Fortsetzung).

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{(t^2 + 0^2)^2} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t}{(0^2 + t^2)^2} - 0}{t} = 0$$

Aber: Im Nullpunkt $(0, 0)$ ist die Funktion **nicht** stetig, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0.$$

□

Bemerkung. Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion f zu garantieren, benötigt man somit zusätzliche Voraussetzungen an f .

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, dort **beschränkt**, so ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in \mathbf{x}^0 .

Beachte: In unserem vorigen Beispiel sind die partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung der Null $(0, 0)$ **nicht** beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

□

Beweis des Satzes.

Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)) \\ &+ (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\ &+ (f(x_1, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\ &\vdots \\ &+ (f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)) \end{aligned}$$

Für jede Differenz auf der rechten Seite betrachten wir f als univariate Funktion:

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0 .

Vollendung des Beweises.

Anwendung des **Mittelwertsatzes** auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \xi_n) \cdot (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n^0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-2}, \xi_{n-1}, \mathbf{x}_n^0) \cdot (\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_{n-1}^0) \\ &\vdots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_n^0) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^0) \end{aligned}$$

Mit der Beschränktheit der partiellen Ableitungen gilt

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq C_1 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^0| + \dots + C_n |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n^0|$$

für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, und damit ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in \mathbf{x}^0 , denn es gilt

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}^0) \quad \text{für } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Folgerung: Stetig partiell differenzierbare Funktionen sind stetig, d.h. $C^1 \subset C^0$.

Höhere Ableitungen.

Definition: Eine skalare Funktion $f(\mathbf{x})$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen von f erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** von f mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

□

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **k-fach partiell differenzierbar**, falls alle Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

der **Ordnung** k auf D existieren.

Alternative Notation:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k -ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion $f(\mathbf{x})$ **k-fach stetig partiell differenzierbar** oder auch **C^k -Funktion** auf D . Stetige Funktionen $f(\mathbf{x})$ nennt man **C^0 -Funktionen**. \square

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n \dots \partial x_1} = ?$

Partielle Ableitungen nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen **nicht** beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

berechnet man direkt

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = +1$$

d.h. $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. □

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^2 -Funktion, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweisidee: Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes (**Übung**). □

Folgerung: Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^k -Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k -ten Ordnung **beliebig** vertauschen! □

Beispiel. Berechne für die Funktion

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz} .

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist beliebig vertauschbar, da $f \in C^3$.

- Differenziere zunächst nach z :

$$f_z(x, y, z) = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

- Differenziere dann f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2}) \right) \\ &= 3x^2 y^2 \cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

- Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz}(x, y, z) = 6x^2 y \cos(x^3)$$

Der Laplace-Operator. Der **Laplace-Operator** ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}.$$

- Beispiele für (relevante) partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (\text{Wellengleichung})$$

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung})$$

- Falls $\Delta u = 0$, so heißt f **harmonisch**.

Beispiel: Für $u(x) \equiv u(r(x))$, kurz $u = u(r)$, wobei $r = \|x\|_2$, gilt

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(r) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u'(r) \frac{x_i}{r} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \frac{r - x_i^2/r}{r^2} \right\} \\ &= \frac{u''(r)}{r^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{u'(r)}{r^3} \sum_{i=1}^n (r^2 - x_i^2) \\ &= u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r).\end{aligned}$$

□

Vektorwertige Funktionen.

Definition: Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ eine vektorwertige Funktion. Die Funktion \mathbf{f} heißt **partiell differenzierbar** in $\mathbf{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}$$

existieren. Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

□

Vektorfelder.

Definition: Für $m = n$ nennt man die Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(\mathbf{x})$ von $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ eine C^k -Funktion, so nennt man \mathbf{f} ein **C^k -Vektorfeld**. □

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** in $\mathbf{x} \in D$ durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

oder

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Rechenregeln und Rotation.

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{f} + \beta \operatorname{div} \mathbf{g} \quad \text{für } \mathbf{f}, \mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \varphi, \mathbf{f}) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{f} \quad \text{für } \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Bemerkung: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im \mathbb{R}^3 , $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$, definiert man dessen **Rotation** in $\mathbf{x} \in D$ durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Big|_{\mathbf{x}}$$

□

Alternative Notationen und weitere Rechenregeln.

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{f} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{g} \quad \text{für } \mathbf{f}, \mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f} \quad \text{für } \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Bemerkung: Ist $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine C^2 -Funktion, so folgt

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0$$

mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, d.h. Gradientenfelder sind stets **rotationsfrei**. □

17.2 Das vollständige Differential

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ heißt **differenzierbar** in \mathbf{x}^0 (oder **vollständig differenzierbar** bzw. **total differenzierbar** in \mathbf{x}^0), falls es eine lineare Abbildung

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

mit einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

gilt, d.h.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$

□

Das vollständige Differential.

Bezeichnungen: Man nennt die lineare Abbildung \mathbf{l} das (**vollständige Differential**) oder das **totale Differential** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 , und man bezeichnet \mathbf{l} mit $d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.

Die zugehörige Matrix \mathbf{A} heißt **Jacobi-Matrix** oder **Funktionalmatrix** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 und wird mit $\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ (manchmal auch mit $\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ oder mit $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$) bezeichnet.

Bemerkung: Für $m = n = 1$ erhalten wir die bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0 .

Bemerkung: Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ein Zeilenvektor und $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}^T, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$. □

Vollständige und partielle Differenzierbarkeit.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

- (a) Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so ist $f(\mathbf{x})$ auch stetig in \mathbf{x}^0 .
- (b) Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so ist das (vollständige) Differential und damit auch die Jacobi-Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad}f_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \text{grad}f_m(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

- (c) Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^1 -Funktion auf D , so ist $f(\mathbf{x})$ auf D differenzierbar.

Beweis von (a): Ist \mathbf{f} in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| = 0,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| + \|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion \mathbf{f} stetig im Punkt \mathbf{x}^0 . □

Beweis von (b): Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Da \mathbf{f} im Punkt \mathbf{x}^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty} &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{|t|} - \frac{t\mathbf{A}\mathbf{e}_i}{|t|} \\ &= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i \right) \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Beweisidee für (c): Anwendung des Mittelwertsatzes (**Übung**). ■

Beispiele.

- Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi-Matrix:

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2) = \text{grad}f(x_1, x_2) = e^{2x_2} (1, 2x_1)$$

- Betrachte die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich in der Form

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(s) & 2 \cos(s) & 3 \cos(s) \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Weitere Beispiele.

- Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ae}_i \rangle \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{Ax} + \mathbf{x}^T \mathbf{Ae}_i \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \text{grad}f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$

Das vollständige Differential.

Bemerkung: Für eine differenzierbare Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{x} + \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{x}\|) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} \Delta x_k + \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{x}\|)\end{aligned}$$

somit

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k} \Delta x_k$$

in *erster Näherung* für die Änderung um $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Definition: Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\mathbf{x}^0 \in D$. Dann notieren wir

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) dx_1 + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) dx_n,$$

wobei dx_1, \dots, dx_n die **Differentiale** der Koordinaten x_1, \dots, x_n heißen, und $d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ das **vollständige Differential** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 . □

Vollständiges Differential und Funktionalmatrix.

Beobachtung: Mit der Darstellung

$$df(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) dx_n,$$

und $dx_k(\mathbf{x}) = x_k - x_k^0$, $1 \leq k \leq n$, ergibt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen dem totalen Differential $df(\mathbf{x}^0)$ und der Funktionalmatrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)$ mit

$$df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0)(x_k - x_k^0) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),$$

d.h.

$$df(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

□

Differentiationsregeln.

Satz:

- **Linearität:** Sind $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, differenzierbar in \mathbf{x}^0 und es gilt

$$\mathbf{d}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g})(\mathbf{x}^0) = \alpha \mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \beta \mathbf{d}\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$$

$$\mathbf{J}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g})(\mathbf{x}^0) = \alpha \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \beta \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$$

- **Kettenregel:** Ist $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, und ist $\mathbf{g} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ ebenfalls in \mathbf{x}^0 differenzierbar.

Für die Differentiale gilt

$$\mathbf{d}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) = \mathbf{d}\mathbf{g}(\mathbf{y}^0) \circ \mathbf{d}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$$

und analog für die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) = \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$$

Beweis von (a): Folgt mit der Linearität von \mathbf{J} und der o.g. Beziehung zu \mathbf{d} .

Beweis von (b): Für Funktionen $\mathbf{r}_1 = \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{x}\|)$ und $\mathbf{r}_2 = \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{y}\|)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{r}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{g}(\mathbf{y}^0) + \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{y}^0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}^0) + \mathbf{r}_2(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Aus der ersten Beziehung bekommt man insbesondere

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| \leq \|\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| + \|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})\|$$

und somit folgt weiterhin, dass

$$\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} \leq \|\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| + \frac{\|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|}$$

für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ beschränkt ist.

Schließlich gilt die Entwicklung

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)) + \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{y}),$$

für deren Rest

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{y})$$

man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} &= \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} + \frac{\mathbf{r}_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} \\ &= \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} + \frac{\mathbf{r}_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\|} \cdot \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 folgt $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}^0$ für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0$ und somit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$



Beispiel zur Kettenregel.

Sei $\mathbf{h} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $\mathbf{x}^0 = \mathbf{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

Dann ist auch die Komposition

$$(f \circ \mathbf{h})(t) = f(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ \mathbf{h})'(t_0) &= \mathbf{J}f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{J}\mathbf{h}(t_0) \\ &= \text{grad}f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{h}'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t_0)) \cdot h'_k(t_0)\end{aligned}$$

□

Richtungsableitungen.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$, und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Vektor. Dann heißt

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

die **Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung)** von $f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} . \square

Beispiel: Betrachte $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung von $f(x, y)$ in Richtung \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + (y+t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t} \\ &= 2(x + y). \end{aligned}$$

\square

Bemerkungen.

- Für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ist die Richtungsableitung in Richtung \mathbf{v} gegeben durch die partielle Ableitung nach Koordinatenrichtung x_i :

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0).$$

- Ist \mathbf{v} ein Einheitsvektor, also $\|\mathbf{v}\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0)$ den **Anstieg** (bzw. die **Steigung**) von $f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} .
- Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 und mit $\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$ gilt

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h})\Big|_{t=0} = \text{grad}f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{h}'(0) = \text{grad}f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Anwendung der Kettenregel.

□

Eigenschaften des Gradienten.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $\mathbf{x}^0 \in D$ differenzierbar. Dann gilt:

(a) Der Gradientenvektor $\text{grad}f(\mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der **Niveaumenge**

$$N_{\mathbf{x}^0} := \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch **Höhenlinien**, und im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch **Äquipotentialflächen**.

(b) Der Gradient $\text{grad}f(\mathbf{x}^0)$ ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f in \mathbf{x}^0 .

Beweisidee:

(a) Kettenregel: $f(\mathbf{x}(t)) \equiv f(\mathbf{x}^0)$, somit $\text{grad}f(\mathbf{x}^0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) = 0$;

(b) Für beliebige Richtung \mathbf{v} gilt mit Cauchy-Schwarzscher Ungleichung

$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)| = |(\text{grad}f(\mathbf{x}^0), \mathbf{v})| \leq \|\text{grad}f(\mathbf{x}^0)\|_2 \cdot \|\mathbf{v}\|_2$$

Gleichheit wird für *Maximum* $\mathbf{v} = \text{grad}f(\mathbf{x}^0) / \|\text{grad}f(\mathbf{x}^0)\|_2$ angenommen. \square

Krummlinige Koordinaten.

Definition: Sei $\Phi : U \rightarrow V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1 -Abbildung, für die die Jacobimatrix $\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}^0)$ an jeder Stelle $\mathbf{u}^0 \in U$ regulär ist. Weiterhin existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$, und diese sei ebenfalls eine C^1 -Abbildung. Dann definiert $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ eine **Koordinatentransformation** von den Koordinaten \mathbf{u} auf die Koordinaten \mathbf{x} . □

Beispiel (Polarkoordinaten): Betrachte für $n = 2$ die **Polarkoordinaten** $\mathbf{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

mit den **kartesischen Koordinaten** $\mathbf{x} = (x, y)$. □

Umrechnung partieller Koordinatenableitungen.

Für alle $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ mit $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ gelten die Relationen

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{u})) &= \mathbf{u} \\ \mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) &= \mathbf{I}_n \quad (\text{Kettenregel}) \\ \mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^{-1}\end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{f}: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(\mathbf{u}) := \tilde{f}(\Phi(\mathbf{u}))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) = (g^{ij}) = (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^T.$$

Notationen.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j},$$

wobei

$$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1} = (\mathbf{J}\Phi)^{-T} = (\mathbf{J}\Phi^{-1})^T.$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf Φ^{-1} . \square

Beispiel: Polarkoordinaten.

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathbf{J} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Polarkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

Beispiel: Umrechnung des **Laplace-Operators** auf Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\end{aligned}$$

□

Beispiel: Kugelkoordinaten.

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann gegeben durch

$$\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Partielle Ableitungen für die Kugelkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Beispiel: Umrechnung des **Laplace-Operators** auf Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

□

17.3 Mittelwertsätze und Taylor-Entwicklungen

Satz (Mittelwertsatz): Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare, skalare Funktion. Weiterhin seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ Punkte in D , so dass die Verbindungsstrecke

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1]\}$$

ganz in D liegt. Dann gibt es eine Zahl $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \text{grad}(f)(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Beweis: Wir setzen

$$h(t) := f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$$

Aus dem Mittelwertsatz für *eine* Veränderliche folgt dann mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= h(1) - h(0) = h'(\theta) \cdot (1 - 0) \\ &= \text{grad}(f)(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$



Definition und Beispiel.

Definition: Gilt $[a, b] \subset D$ für alle Punkte $a, b \in D$, so heißt D **konvex**. \square

Beispiel zum Mittelwertsatz: Gegeben sei die skalare Funktion

$$f(x, y) := \cos(x) + \sin(y)$$

Offensichtlich gilt

$$f(0, 0) = f(\pi/2, \pi/2) = 1 \quad \implies \quad f(\pi/2, \pi/2) - f(0, 0) = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\text{grad}(f)(\theta(\pi/2, \pi/2)) \cdot (\pi/2, \pi/2) = 0$$

In der Tat gilt diese Beziehung für $\theta = \frac{1}{2}$. \square

Mittelwertsatz gilt nur für skalare Funktionen.

Beachte: Der Mittelwertsatz für mehrere Variablen gilt für **skalare** Funktionen, aber i.a. nicht für **vektorwertige** Funktionen!

(Gegen)Beispiel: Betrachte die **vektorwertige** Funktion

$$\mathbf{f}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

Nun gilt

$$\mathbf{f}(\pi/2) - \mathbf{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{f}'\left(\theta \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta\pi/2) \\ \cos(\theta\pi/2) \end{pmatrix}$$

ABER: Die Vektoren auf der rechten Seite haben die Längen $\sqrt{2}$ bzw. $\pi/2$! \square

Der Mittelwert-Abschätzungssatz.

Satz (Mittelwert-Abschätzungssatz): Die Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Weiterhin seien \mathbf{a}, \mathbf{b} Punkte in D mit $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset D$. Dann gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|_2 \leq \|\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|_2$$

Beweis: Für $g(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$, mit festem $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, gilt

$$\text{grad}(g)(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^T \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$g(\mathbf{b}) - g(\mathbf{a}) = \text{grad}(g)(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

und somit gilt $\mathbf{v}^T (\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = \mathbf{v}^T \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt hiermit

$$|\mathbf{v}^T (\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}))| \leq \|\mathbf{v}\|_2 \cdot \|\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|_2.$$

Für $\mathbf{v} := \mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ folgt hieraus die Behauptung. ■

Allgemeiner Mittelwert-Abschätzungssatz.

Satz (Mittelwert-Abschätzungssatz): Die Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Weiterhin seien \mathbf{a}, \mathbf{b} Punkte in D mit $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset D$. Dann gilt für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ eine Abschätzung der Form

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leq \sup_{\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|\mathbf{J}\mathbf{f}(\xi)\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

Beweisidee: Wie im vorigen Satz, jedoch mit der Integraldarstellung

$$(\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = \left(\int_0^1 \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) dt \right) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

und der Standardabschätzung

$$\left\| \int_0^1 \mathbf{A}(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|\mathbf{A}(t)\| dt \quad \text{für } \mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad t \in [0, 1].$$

□

Taylor-Entwicklungen: Notationen.

Zunächst definieren wir einen **Multiindex** $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ als

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

Weiterhin sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad \text{und} \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbar, so setzen wir

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

wobei $D_i^{\alpha_i} = \underbrace{D_i \dots D_i}_{\alpha_i\text{-mal}}$, und wir schreiben

$$\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{für } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Der Satz von Taylor.

Satz (Satz von Taylor): Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{m+1} -Funktion, und sei $\mathbf{x}^0 \in D$. Dann gilt für $\mathbf{x} \in D$ die **Taylor-Entwicklung**

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) + R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$$

$$T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha$$

$$R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha$$

mit einem geeigneten $\theta \in (0, 1)$. □

Definition: In der obigen Taylor-Entwicklung heißt $T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ **Taylor-Polynom m -ten Grades** und $R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ wird als **Lagrange-Restglied** bezeichnet. □

Herleitung der Taylorsche Formel.

Wir definieren eine skalare Funktion einer Variablen $t \in [0, 1]$ als

$$g(t) := f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$$

und berechnen die Taylor-Entwicklung um $t = 0$. Es gilt:

$$g(1) = g(0) + g'(0) \cdot (1 - 0) + \frac{1}{2} g''(\xi) \cdot (1 - 0)^2 \quad \text{für ein } \xi \in (0, 1).$$

Die Berechnung von $g'(0)$ liefert mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(0) &= \left. \frac{d}{dt} f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), x_2^0 + t(x_2 - x_2^0), \dots, x_n^0 + t(x_n - x_n^0)) \right|_{t=0} \\ &= D_1 f(\mathbf{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + D_n f(\mathbf{x}^0)(x_n - x_n^0) \\ &= \sum_{|\alpha|=1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha. \end{aligned}$$

Fortsetzung der Herleitung.

Berechnung von $g''(0)$ liefert

$$\begin{aligned}
 g''(0) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) (x_k - x_k^0) \right|_{t=0} \\
 &= D_{11} f(\mathbf{x}^0) (x_1 - x_1^0)^2 + D_{21} f(\mathbf{x}^0) (x_1 - x_1^0) (x_2 - x_2^0) \\
 &\quad + \dots + D_{ij} f(\mathbf{x}^0) (x_i - x_i^0) (x_j - x_j^0) + \dots + \\
 &\quad D_{n-1,n} f(\mathbf{x}^0) (x_{n-1} - x_{n-1}^0) (x_n - x_n^0) + D_{nn} f(\mathbf{x}^0) (x_n - x_n^0)^2 \\
 &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha \quad (\text{Vertauschungssatz von Schwarz!})
 \end{aligned}$$

Nun: Beweis der Taylor-Formel mittels vollständiger Induktion! □

Beweis des Satzes von Taylor.

Die Funktion $g(t) := f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$ ist $(m + 1)$ -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$g(1) = \sum_{k=0}^m \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} \quad \text{für ein } \theta \in [0, 1]$$

Weiterhin gilt (per Induktion über k)

$$\frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha$$

und

$$\frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha.$$



Beispiel.

Berechne das Taylor-Polynom $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ zweiten Grades der Funktion

$$f(x, y, z) = x y^2 \sin z$$

zum Entwicklungspunkt $(x, y, z) = (1, 2, 0)^T$.

Berechnung von $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ benötigt partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

Diese Ableitungen müssen am Punkt $(x, y, z) = (1, 2, 0)^T$ ausgewertet werden.

Als Ergebnis erhält man $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$ in der Form

$$T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = 4z(x + y - 2)$$



Bemerkung. Das Restglied eines Taylor-Polynoms enthält **alle** partiellen Ableitungen der Ordnung $(m + 1)$:

$$R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha$$

Sind alle diese Ableitungen in der Nähe von \mathbf{x}^0 beschränkt durch eine Konstante C , so gilt die **Restgliedabschätzung**

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty^{m+1}$$

Für die Approximationsgüte des Taylor-Polynoms einer C^{m+1} -Funktion folgt

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^{m+1}).$$

Spezialfall $m = 1$: Für eine C^2 -Funktion $f(\mathbf{x})$ bekommt man

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \text{grad}(f)(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2).$$

Die Hesse-Matrix.

Man nennt die Matrix

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 .

Hesse-Matrix = Jacobi-Matrix des Gradienten ∇f

Die Taylor-Entwicklung einer C^3 -Funktion lautet

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \text{grad } f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^3)$$

Die Hesse-Matrix einer C^2 -Funktion ist symmetrisch. □

18 Anwendungen der Differentialrechnung mehrerer Variabler

18.1 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{x}^0 \in D$. Dann hat $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0

- ein **globales Maximum**, falls $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$ für alle $\mathbf{x} \in D$.
- ein **strenges globales Maximum**, falls $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$ für alle $\mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}^0\}$.
- ein **lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \text{ mit } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon.$$

- ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}^0\} \text{ mit } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon.$$

Analoge Definitionen gelten für Minima. □

Notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Satz: Besitzt $f(\mathbf{x})$, $f \in C^1$, in einem Punkt $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum), so gilt

$$\text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) = 0.$$

Beweis: Für ein beliebige Richtung $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq 0$ ist die Funktion

$$\varphi(t) := f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$$

in einer Umgebung von $t^0 = 0$ stetig differenzierbar.

Weiterhin hat $\varphi(t)$ bei $t^0 = 0$ ein lokales Extremum. Damit folgt:

$$\varphi'(0) = \text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Da dies für alle $\mathbf{v} \neq 0$ gilt (insbesondere $\mathbf{v} = \text{grad}(f)(\mathbf{x}^0)$), folgt die Bedingung

$$\text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) = 0.$$



Bemerkungen.

- Die Bedingung $\text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) = 0$ liefert ein *nichtlineares* Gleichungssystem zur Berechnung von $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ mit n Gleichungen und n Unbekannte.
- Die Punkte $\mathbf{x}^0 \in D^0$ mit $\text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) = 0$ nennt man **stationäre Punkte** von $f(\mathbf{x})$. Stationäre Punkte sind **nicht** notwendigerweise lokale Extrema. Zum Beispiel besitzt die Funktion

$$f(x, y) := x^2 - y^2$$

den Gradienten

$$\text{grad}(f)(x, y) = 2(x, -y)$$

und hat daher nur einen stationären Punkt: $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$. Der Punkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$ ist jedoch ein **Sattelpunkt** von f .

Definition: Ein stationärer Punkt \mathbf{x}^0 von f heißt **Sattelpunkt**, falls es in **jeder** Umgebung von \mathbf{x}^0 zwei Punkte \mathbf{x}^1 und \mathbf{x}^2 gibt mit $f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^2)$. \square

Klassifikation stationärer Punkte.

Satz: Sei $f(\mathbf{x})$ eine C^2 -Funktion auf D^0 und $\mathbf{x}^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt von $f(\mathbf{x})$, d.h. $\text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) = 0$.

(a) **Notwendige Bedingung**

Ist \mathbf{x}^0 ein lokales Extremum von $f(\mathbf{x})$, so gilt:

\mathbf{x}^0 lokales Minimum $\implies \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ positiv semidefinit;

\mathbf{x}^0 lokales Maximum $\implies \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ negativ semidefinit;

(b) **Hinreichende Bedingung**

Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit (bzw. negativ definit), so ist \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ indefinit, so ist \mathbf{x}^0 ein Sattelpunkt, d.h. es gibt in jeder Umgebung von \mathbf{x}^0 Punkte \mathbf{x}^1 und \mathbf{x}^2 mit $f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^2)$.

Beweis zu (a): Sei \mathbf{x}^0 ein lokales Minimum. Für $\mathbf{v} \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein folgt aus der Taylor-Formel

$$f(\mathbf{x}^0 + \varepsilon\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}(\varepsilon\mathbf{v})^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0 + \theta\varepsilon\mathbf{v})(\varepsilon\mathbf{v}) \geq 0 \quad (1)$$

mit $\theta = \theta(\varepsilon, \mathbf{v}) \in (0, 1)$.

Der Gradient in der Taylorentwicklung verschwindet, $\text{grad}(f)(\mathbf{x}^0) = 0$, denn \mathbf{x}^0 ist stationär. Aus (1) folgt

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0 + \theta\varepsilon\mathbf{v})\mathbf{v} \geq 0 \quad (2)$$

Da $f(\mathbf{x})$ eine C^2 -Funktion ist, ist die Hesse-Matrix eine **stetige** Abbildung. Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt daher

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{v} \geq 0$$

aus (2), d.h. $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ ist positiv semidefinit. ■

Beweis zu (b): Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit, so ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$ ebenfalls in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{x}^0) \subset D$ um \mathbf{x}^0 positiv definit. Dies folgt aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen.

Für $\mathbf{x} \in K_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ gilt damit

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) > 0$$

mit $\theta \in (0, 1)$, d.h. $f(\mathbf{x})$ hat in \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Minimum.

Ist $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ indefinit, so existieren zu Eigenwerten von $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ mit verschiedenen Vorzeichen bestimmte Eigenvektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} mit

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) \mathbf{v} > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) \mathbf{w} < 0$$

und somit ist \mathbf{x}^0 ein Sattelpunkt. ■

Geometrische Interpretation: Die Hesse-Matrix kann positive und negative Eigenwerte besitzen. Die zugehörigen Eigenvektoren geben dabei Richtungen an, in denen die Funktion wächst beziehungsweise fällt. □

Bemerkungen.

- Ein stationärer Punkt \mathbf{x}^0 mit $\det(\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)) = 0$ heißt **ausgeartet**. Die Hesse-Matrix besitzt dann den Eigenwert $\lambda = 0$.
- Ist \mathbf{x}^0 **nicht** ausgeartet, so gibt es 3 Fälle für die Eigenwerte von $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$:
 - alle Eigenwerte sind positiv $\implies \mathbf{x}^0$ ist strenges lokales Minimum;
 - alle Eigenwerte sind negativ $\implies \mathbf{x}^0$ ist strenges lokales Maximum;
 - es gibt positive und negative Eigenwerte $\implies \mathbf{x}^0$ ist Sattelpunkt.
- Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\mathbf{x}^0 \text{ lokales Minimum} \quad \longleftarrow \quad \mathbf{x}^0 \text{ strenges lokales Minimum}$$



$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv semidefinit} \quad \longleftarrow \quad \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) \text{ positiv definit}$$

Bemerkung: Für keine der obigen Implikationen gilt die Umkehrung. □

Weitere Bemerkungen.

- Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^3 -Funktion, \mathbf{x}^0 ein stationärer Punkt von $f(\mathbf{x})$ und $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ positiv definit, so gilt die Abschätzung:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq \lambda_{\min} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2$$

wobei λ_{\min} den **kleinsten** Eigenwert der Hesse-Matrix bezeichnet.

Nach dem Satz von Taylor gilt dann

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 + R_3(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) \\ &\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 \left(\frac{\lambda_{\min}}{2} - C \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \right) \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$.

Um \mathbf{x}^0 wächst $f(\mathbf{x})$ somit mindestens quadratisch mit dem Abstand zu \mathbf{x}^0 .

□

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$$

und suchen die stationären Punkte:

$$\text{grad}(f)(x, y) = (y^2 + x(3x + 2), 2y(x - 1))$$

Die Bedingung $\text{grad}(f)(x, y) = 0$ liefert die beiden stationären Punkte

$$\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^1 = (-2/3, 0).$$

Die jeweiligen Hesse-Matrizen von f an den Stellen \mathbf{x}^0 und \mathbf{x}^1 lauten

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^1)$ ist negativ definit, somit ist \mathbf{x}^1 ein strenges lokales Maximum von $f(\mathbf{x})$.

Die Matrix $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$ ist indefinit, somit ist \mathbf{x}^0 ein Sattelpunkt. □

18.2 Implizit definierte Funktionen

Ziel: Untersuche Lösungsmengen von *nichtlinearen* Gleichungssystemen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

mit $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h. betrachte m Gleichungen für n Unbekannte mit

$$m < n,$$

d.h. wir haben **weniger** Gleichungen als Unbekannte. Man nennt dann das Gleichungssystem **unterbestimmt** und die Lösungsmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ enthält gewöhnlich *unendlich* viele Punkte. □

Auflösbarkeit von (nichtlinearen) Gleichungen.

Frage: Kann man das System $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ nach bestimmten Unbekannten, zum Beispiel den letzten m Variablen x_{n-m+1}, \dots, x_n , **auflösen**?

Mit anderen Worten: Existiert eine Funktion $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_{n-m})$ mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{n-m}).$$

Terminologie: “**Auflösen**” bedeutet also die letzten m Variablen durch die ersten $n - m$ Variablen zu beschreiben.

Weitere Frage: Nach welchen m Variablen lässt sich das Gleichungssystem auflösen? Ist die Auflösung *global* auf dem Definitionsbereich D möglich oder nur *lokal* auf einer Teilmenge $\tilde{D} \subset D$?

Geometrische Interpretation: Die Lösungsmenge G von $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ lässt sich (zumindest lokal) als Graph einer Funktion \mathbf{f} darstellen. □

Beispiel.

Die Kreisgleichung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{für } r > 0$$

definiert ein **unterbestimmtes** nichtlineares Gleichungssystem, denn wir haben **zwei** Unbekannte (x, y) , aber nur **eine** Gleichung.

Die Kreisgleichung lässt sich **lokal** auflösen und definiert dabei vier Funktionen:

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} && \text{für } -r \leq x \leq r \\ x &= \pm\sqrt{r^2 - y^2} && \text{für } -r \leq y \leq r \end{aligned}$$

□

Beispiel.

Sei $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ eine **affin-lineare** Funktion, d.h. \mathbf{g} hat die Form

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{für } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Wir spalten die Variable \mathbf{x} in zwei Vektoren auf

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, \dots, x_{n-m})^T \in \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^{(2)} = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^m$$

Aufspaltung der Matrix $\mathbf{C} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}]$ ergibt die Darstellung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Das Gleichungssystem $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ist genau dann nach den Variablen $\mathbf{x}^{(2)}$ (eindeutig) auflösbar, falls \mathbf{A} regulär ist:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad \iff \quad \mathbf{x}^{(2)} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}) =: \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}).$$

□

Fortsetzung des Beispiels.

Frage: Wie kann man die Matrix \mathbf{A} in Abhängigkeit von \mathbf{g} schreiben?

Aus der Darstellung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}$$

erkennt man direkt, dass

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^{(2)}}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

gilt, d.h. \mathbf{A} ist die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$$

für festes $\mathbf{x}^{(1)}$!

Fazit: Auflösbarkeit ist somit gegeben, falls die Jacobi-Matrix regulär ist. \square

Satz über implizite Funktionen.

Satz: Sei $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Variablen in D seien (\mathbf{x}, \mathbf{y}) mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Der Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in D$ sei eine Lösung von $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$. Falls die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \end{pmatrix}$$

regulär ist, so gibt es Umgebungen U von \mathbf{x}^0 und V von \mathbf{y}^0 , $U \times V \subset D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{f} : U \rightarrow V$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U.$$

und

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right).$$

Beispiel.

Für die Kreisgleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $r > 0$, findet man im Punkt $(x^0, y^0) = (0, r)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, r) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, r) = 2r \neq 0$$

Man kann also in einer Umgebung von $(0, r)$ die Kreisgleichung nach y auflösen:

$$y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Ableitung $y'(x)$ kann man durch **implizite Differentiation** berechnen:

$$g(x, y(x)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g_x(x, y) + g_y(x, y)y'(x) = 0$$

also

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

□

Weiteres Beispiel. Betrachte die Gleichung

$$g(x, y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0.$$

Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{y-x} + 3 > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion. Implizite Differentiation liefert

$$e^{y-x}(y' - 1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Erneute Differentiation liefert

$$e^{y-x}y'' + e^{y-x}(y' - 1)^2 + 3y'' + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{2 + e^{y-x}(y' - 1)^2}{e^{y-x} + 3}.$$

ABER: Explizites Auflösen nach y ist in diesem Fall nicht möglich!

Stattdessen wertet man $y = f(x)$ numerisch aus. □

Allgemeine Bemerkung. Implizites Differenzieren einer durch

$$g(x, y) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

implizit definierten Funktion $y = f(x)$, mit $x, y \in \mathbb{R}$, ergibt

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$
$$f''(x) = -\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^3}$$

Daher ist der Punkt x^0 ein *stationärer* Punkt von $f(x)$, falls gilt

$$g(x^0, y^0) = g_x(x^0, y^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(x^0, y^0) \neq 0.$$

Weiter ist x^0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls

$$\frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} > 0 \quad \left(\text{bzw. } \frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} < 0 \right).$$

Implizite Darstellung ebener Kurven.

Betrachte die Lösungsmenge einer skalaren Gleichungen

$$g(x, y) = 0$$

Falls gilt

$$\text{grad}(g) = (g_x, g_y) \neq 0$$

so definiert $g(x, y)$ lokal eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = \bar{f}(y)$.

Definition: Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x, y) = 0$ mit

- $\text{grad}(g)(x^0, y^0) \neq 0$ heißt **regulärer Punkt**.
- $\text{grad}(g)(x^0, y^0) = 0$ heißt **singulärer Punkt**.

□

Horizontale und vertikale Tangenten.

Bemerkung:

(a) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathbf{x}^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(\mathbf{x}^0) \neq 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine **horizontale Tangente** in \mathbf{x}^0 .

(b) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathbf{x}^0) \neq 0 \quad \text{und} \quad g_y(\mathbf{x}^0) = 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine **vertikale Tangente** in \mathbf{x}^0 .

(c) Ist \mathbf{x}^0 ein **singulärer Punkt** so wird die Lösungsmenge bei \mathbf{x}^0 “in zweiter Näherung” durch folgende **quadratische Gleichung** approximiert.

$$g_{xx}(\mathbf{x}^0)(x - x^0)^2 + 2g_{xy}(\mathbf{x}^0)(x - x^0)(y - y^0) + g_{yy}(\mathbf{x}^0)(y - y^0)^2 = 0$$

Bemerkungen.

Wegen (c) erhält man für $g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} \neq 0$:

$\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) > 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **isolierter Punkt** der Lösungsmenge

$\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) < 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **Doppelpunkt**

$\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) = 0$: \mathbf{x}^0 ist ein **Rückkehrpunkt** bzw. eine **Spitze**.

Geometrische Interpretation:

- (a) Gilt $\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) > 0$, so sind beide Eigenwerte von $\mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)$ entweder strikt positiv oder strikt negativ, d.h. \mathbf{x}^0 ist ein strenges lokales **Minimum** oder **Maximum** von $g(\mathbf{x})$.
- (b) Gilt $\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) < 0$, so haben die beiden Eigenwerte von $\mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)$ unterschiedliche Vorzeichen, d.h. \mathbf{x}^0 ist ein **Sattelpunkt** von $g(\mathbf{x})$.
- (c) Gilt $\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0) = 0$, so ist der stationäre Punkt \mathbf{x}^0 von $g(\mathbf{x})$ **ausgeartet**.

□

Beispiel 1.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x - 2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2 - 4x$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x - 4$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein **isolierter Punkt**.

□

Beispiel 2.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2 + 2xq^2$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x + 2q^2$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ für $q \neq 0$ ein **Doppelpunkt**. □

Beispiel 3.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$g_x = y^2 + 3x^2$$

$$g_y = 2y(x - 1)$$

$$g_{xx} = 6x$$

$$g_{xy} = 2y$$

$$g_{yy} = 2(x - 1)$$

$$\mathbf{H}_g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine **Spitze** (bzw. **Rückkehrpunkt**). □

Implizite Darstellung von Flächen.



Das große rote Betzenherz.

$$g(x, y, z) := 10(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2z^3 - 10y^2z^3 = 0$$

Siehe Homepage Fachbereich Mathematik, TU Kaiserslautern:

<http://www.mathematik.uni-kl.de>

Zur impliziten Darstellung von Flächen.

- Die Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ist für $\text{grad}(g) \neq \mathbf{0}$ lokal eine **Fläche** im \mathbb{R}^3 .
- Für die **Tangentialebene** in $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T$ mit $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und $\text{grad}(g)(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ bekommen wir für $\Delta\mathbf{x}^0 := \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ mit Taylor-Entwicklung

$$\text{grad}(g) \cdot \Delta\mathbf{x}^0 = g_x(\mathbf{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathbf{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathbf{x}^0)(z - z^0) = 0$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$.

- Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0) \neq 0$, so gibt es lokal um \mathbf{x}^0 eine Darstellung der Form

$$z = f(x, y)$$

und für die **partiellen Ableitungen** von $f(x, y)$ bekommt man

$$\text{grad}(f)(x, y) = (f_x, f_y) = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y) = \left(-\frac{g_x}{g_z}, -\frac{g_y}{g_z} \right).$$

mit dem Satz über implizite Funktionen.

Das Umkehrproblem

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach \mathbf{x} auflösen, also **invertieren**?

Satz (Umkehrsatz): Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1 -Funktion. Ist für ein $\mathbf{x}^0 \in D$ die Jacobi-Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)$ regulär, so gibt es Umgebungen U und V von \mathbf{x}^0 und $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, so dass \mathbf{f} den Bereich U **bijektiv** auf V abbildet.

Die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{-1} : V \rightarrow U$ ist ebenfalls eine C^1 -Funktion, und es gilt für alle $\mathbf{x} \in U$

$$\mathbf{Jf}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Beweis: Wende auf $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ den Satz über implizite Funktionen an. \square

Bemerkung: Man nennt dann \mathbf{f} lokal einen **C^1 -Diffeomorphismus**. \square

18.3 Extremalprobleme unter Gleichungsnebenbedingungen

Frage: Welche Abmessungen sollte eine Metalldose haben, damit bei vorgegebenem Volumen der Materialverbrauch am geringsten ist?

Lösungsansatz: Sei $r > 0$ der Radius und $h > 0$ die Höhe der Dose. Dann gilt

$$V = \pi r^2 h$$

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Setze bei vorgegebenem Volumen $c \in \mathbb{R}_+$, und mit $x := r, y := h$,

$$f(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi x y$$

$$g(x, y) = \pi x^2 y - c = 0$$

Bestimme das Minimum der Funktion $f(x, y)$ auf der Menge

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid g(x, y) = 0\}.$$

Lösung des restringierten Minimierungsproblems.

Aus $g(x, y) = \pi x^2 y - c = 0$ folgt

$$y = \frac{c}{\pi x^2}$$

Einsetzen in $f(x, y)$ ergibt

$$h(x) := 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{c}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2c}{x}$$

Bestimme nun das Minimum der Funktion $h(x)$:

$$h'(x) = 4\pi x - \frac{2c}{x^2} = 0 \quad \iff \quad 4\pi x = \frac{2c}{x^2} \quad \iff \quad x = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Hinreichende Bedingung

$$h''(x) = 4\pi + \frac{4c}{x^3} \quad \implies \quad h''\left(\left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}\right) = 12\pi > 0.$$

□

Allgemeine Formulierung des Problems.

Bestimme die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,$$

wobei $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Die Nebenbedingungen lauten also

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Alternativ: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Die Lagrange-Funktion und das Lagrange-Lemma.

Wir definieren die **Lagrange-Funktion**

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in D$$

und suchen die Extremwerte von $F(\mathbf{x})$ für festes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$.

Die Zahlen λ_i , $i = 1, \dots, m$ nennt man **Lagrange-Multiplikatoren**.

Satz: (Lagrange-Lemma): *Minimiert (bzw. maximiert) $\mathbf{x}^0 \in D$ die Lagrange-Funktion $F(\mathbf{x})$ (für ein festes λ) über D und gilt $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, so liefert \mathbf{x}^0 das Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ über $G := \{\mathbf{x} \in D \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.*

Beweis: Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in D$ gilt nach Voraussetzung

$$F(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$$

Wählt man speziell $\mathbf{x} \in G$, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, also auch $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x})$. ■

Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Sind f und g_i , $i = 1, \dots, m$, C^1 -Funktionen, so ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle \mathbf{x}^0 von $F(\mathbf{x})$ gegeben durch

$$\text{grad}(F)(\mathbf{x}) = \text{grad}(f)(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad}(g_i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ergibt sich ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit $(n + m)$ Gleichungen und $(n + m)$ Unbekannten \mathbf{x} und λ .

Die Lösungen $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ sind geeignete Kandidaten für die gesuchten Extremstellen, denn diese erfüllen die o.g. notwendige Bedingung.

Alternativ: Definiere eine Lagrange-Funktion

$$G(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suche die Extremstellen von $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich \mathbf{x} **und** λ .

Bemerkung.

Man kann auch eine **hinreichende** Bedingung aufstellen:

Sind die Funktionen f und g C^2 -Funktionen und ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange-Funktion positiv (bzw. negativ) definit, so ist \mathbf{x}^0 tatsächlich ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ auf G .

In den meisten Anwendungen ist die hinreichende Bedingung allerdings **nicht** erfüllt, obwohl \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Extremum ist.

Insbesondere kann man aus der Indefinitheit der Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ **nicht** schließen, dass \mathbf{x}^0 kein Extremwert ist.

Ähnlich problematisch ist die hinreichende Bedingung, die man aus der Hesse-Matrix für die Lagrange-Funktion $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich \mathbf{x} **und** λ erhält.

Beispiel.

Gesucht seien die Extrema von $f(x, y) := xy$ auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Da die Funktion f stetig und $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, folgt die Existenz von globalen Maxima und Minima von f auf K .

Wir betrachten zunächst das Innere K^0 von K , also die *offene* Menge

$$K^0 := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Die notwendige Bedingung für einen Extremwert lautet nun

$$\text{grad}(f) = (y, x) = \mathbf{0}.$$

Somit ist der Ursprung $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ Kandidat für ein (lokales) Extremum.

Fortsetzung des Beispiels.

Die Hesse-Matrix \mathbf{H}_f im Ursprung, gegeben durch

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist **indefinit**. Daher ist \mathbf{x}^0 ein **Sattelpunkt**.

Die Extrema der Funktion müssen also auf dem Rand liegen, der eine **Gleichungsnebenbedingung** darstellt:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Wir suchen also die Extremwerte von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Komplettierung des Beispiels.

Damit ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$y + 2\lambda x = 0$$

$$x + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

mit den vier Lösungen

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})^T \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})^T$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(3)} = (\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})^T \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})^T$$

Minima und Maxima lassen sich nun einfach aus den Funktionswerten ablesen:

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = -1/2 \quad f(\mathbf{x}^{(3)}) = f(\mathbf{x}^{(4)}) = 1/2$$

d.h. Minima sind $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$, Maxima sind $\mathbf{x}^{(3)}$ und $\mathbf{x}^{(4)}$. □

Die Lagrange-Multiplikatoren-Regel.

Satz: Seien $f, g_1, \dots, g_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils C^1 -Funktionen, und sei $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Weiterhin gelte die **Regularitätsbedingung**

$$\text{rang}(\mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)) = m.$$

Dann existieren **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so dass für die **Lagrange-Funktion**

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

die folgende **notwendige Bedingung erster Ordnung** gilt:

$$\text{grad}(F)(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Notwendige Bedingung zweiter Ordnung.

Satz: Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Minimum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$, ist die Regularitätsbedingung erfüllt und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ zugehörige Lagrange-Multiplikatoren, so ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange-Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum

$$\mathbf{TG}(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad}(g_i)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{y}^T \mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbf{TG}(\mathbf{x}^0).$$

□

Hinreichende Bedingung.

Satz: Ist für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in G$ die Regularitätsbedingung erfüllt, existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so dass \mathbf{x}^0 ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange-Funktion ist, und ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ positiv definit auf dem Tangentialraum

$$\mathbf{TG}(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad}(g_i)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{y}^T \mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0) \mathbf{y} > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbf{TG}(\mathbf{x}^0) \setminus \{0\},$$

so ist \mathbf{x}^0 ein strenges lokales Minimum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. □

Beispiel.

Man bestimme das globale Maximum der Funktion

$$f(x, y) = -x^2 + 8x - y^2 + 9$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$F(x) = -x^2 + 8x - y^2 + 9 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Aus der notwendigen Bedingung ergibt sich das nichtlineare System

$$-2x + 8 = -2\lambda x$$

$$-2y = -2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Fortsetzung des Beispiels.

Aus der notwendigen Bedingung ergibt sich das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq 1$. Verwendet man dies in der zweiten Gleichung, so gilt $y = 0$. Aus der dritten Gleichung erkennt man sofort $x = \pm 1$.

Demnach sind nur die beiden Punkte $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (-1, 0)$ Kandidaten für das globale Maximum. Wegen

$$f(1, 0) = 16 \quad \text{und} \quad f(-1, 0) = 0$$

wird das globale Maximum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ im Punkt $(x, y) = (1, 0)$ angenommen. \square

Noch ein Beispiel.

Bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$$

auf dem Schnitt des Zylinders

$$Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2\}$$

mit der Ebene

$$E := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1\}$$

Umformulierung: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$g_2(x, y, z) := x + z - 1 = 0$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hat den maximalen Rang 2, d.h. wir können über die Lagrange-Funktion Extremwerte bestimmen:

$$F(x, y, z) = 2x + 3y + 2z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$3 + 2\lambda_1 y = 0$$

$$2 + \lambda_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x + z = 1$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

$$2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$3 + 2\lambda_1 y = 0$$

$$2 + \lambda_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x + z = 1$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$2\lambda_1 x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $x = 0$.

Damit ergeben sich die möglichen Extremwerte als

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \quad \text{und} \quad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1).$$

Komplettierung des Beispiels.

Die möglichen Extremwerte sind also

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \quad \text{und} \quad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1).$$

Man berechnet nun die zugehörigen Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{2}, 1) &= 3\sqrt{2} + 2 \\ f(0, -\sqrt{2}, 1) &= -3\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Daher liegt im Punkt $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$ ein Maximum, im Punkt $(x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$ ein Minimum. □

18.4 Das Newton-Verfahren

Ziel: Wir suchen die Nullstellen einer Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- Wir kennen bereits die **Fixpunktiteration**

$$\mathbf{x}^{k+1} := \Phi(\mathbf{x}^k)$$

mit Startwert \mathbf{x}^0 und Iterationsvorschrift $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Konvergenzaussagen liefert der **Banachsche Fixpunktsatz**.

Vorteil: Dieses Verfahren ist **ableitungsfrei**

Nachteile:

- numerisches Verfahren konvergiert zu langsam (nur linear),
- es gibt keine eindeutige Iterationsvorschrift.

Zur Konstruktion des Newton-Verfahrens.

Ausgangspunkt: Gegeben sei eine C^1 -Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Wir suchen *eine* Nullstelle von \mathbf{f} , d.h. ein $\mathbf{x}^* \in D$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Konstruktion des Newton-Verfahrens: Die Taylor-Entwicklung von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ um einen Startwert \mathbf{x}^0 lautet

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

Setzen wir $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, so folgt

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \approx -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$$

Eine Näherungslösung für \mathbf{x}^* ist dann \mathbf{x}^1 , $\mathbf{x}^1 \approx \mathbf{x}^*$, die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$$

Das Newton-Verfahren als Algorithmus.

Das **Newton-Verfahren** kann man somit wie folgt als Algorithmus formulieren.

Algorithmus (Newton-Verfahren):

(1) FOR $k = 0, 1, 2, \dots$

(2a) Löse $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$;

(2b) Setze $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$;

- Man löst im *jedem* Newton-Schritt ein lineares Gleichungssystem.
- Dessen Lösung $\Delta \mathbf{x}^k$ heißt **Newton-Korrektur**.
- Das Newton-Verfahren ist **skalierungsinvariant**. □

Invarianzen des Newton-Verfahrens.

Satz: *Das Newton-Verfahren ist invariant unter linearen Transformationen der Form*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ regulär,}$$

d.h. die Iterierten für \mathbf{f} und \mathbf{g} sind in diesem Fall identisch.

Beweis: Bildet man das Newton-Verfahren für $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, so lautet die Newton-Korrektur

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^k &= -(\mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{x}^k))^{-1} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \\ &= -(\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k))^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \\ &= -(\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k))^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \end{aligned}$$

womit die Newton-Korrekturen von \mathbf{f} und \mathbf{g} übereinstimmen.

Bei gleichem Startwert \mathbf{x}^0 stimmen somit auch alle Iterierten \mathbf{x}^k überein. ■

Zur lokalen Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Satz: Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Sei $\mathbf{x}^* \in D$ Nullstelle von \mathbf{f} , d.h. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$. Weiterhin sei die Jacobi-Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ regulär für $\mathbf{x} \in D$, und es gelte eine **Lipschitz-Bedingung**

$$\|(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1}(\mathbf{Jf}(\mathbf{y}) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x}))\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D,$$

mit einem $L > 0$. Dann ist das Newton-Verfahren für alle Startwerte $\mathbf{x}^0 \in D$ mit

$$\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \frac{2}{L} =: r \quad \text{und} \quad K_r(\mathbf{x}^*) \subset D$$

wohldefiniert mit $\mathbf{x}^k \in K_r(\mathbf{x}^*)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, und die Newton-Iterierten \mathbf{x}^k konvergieren **quadratisch** gegen \mathbf{x}^* , d.h.

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Weiterhin ist \mathbf{x}^* die eindeutige Nullstelle von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ innerhalb der Kugel $K_r(\mathbf{x}^*)$.

Beweis: Betrachte für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ die Funktion

$$\varphi(t) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Dann ist $\varphi(t)$ stetig differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1} \cdot \mathbf{Jf}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi'(t) - \varphi'(0)\| &= \|(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1} (\mathbf{Jf}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x})) (\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \|(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1} (\mathbf{Jf}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x}))\| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &\leq L \cdot t \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man weiterhin die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| &= \|\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)\| \\ &\leq \left\| \int_0^1 (\varphi'(t) - \varphi'(0)) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi'(t) - \varphi'(0)\| dt \\ &\leq \int_0^1 L \cdot t \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 dt = \frac{L}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2\end{aligned}$$

Den Fehler der Newton-Iteration stellen wir folgendermaßen dar.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^k - (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k))^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{x}^* \\ &= -(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k))^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)) + (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*) \\ &= (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k))^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k)).\end{aligned}$$

Daraus bekommen wir für $0 < \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| < r = \frac{2}{L}$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 < \frac{L}{2} \cdot r \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|.$$

Die nichtnegative Folge $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|$ ist somit streng monoton fallend und daher konvergent, gegen eine reelle Zahl d mit $0 \leq d < r = 2/L$ und $d \leq L/2 \cdot d^2$, woraus $d = 0$ folgt. Somit konvergiert die Folge $\{\mathbf{x}^k\}$.

Die Nullstelle \mathbf{x}^* ist eindeutig. Denn gäbe es eine weitere Nullstelle $\mathbf{x}^{**} \in K_r(\mathbf{x}^*)$ von \mathbf{f} , so folgt ein Widerspruch mit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{**} - \mathbf{x}^*\| &= \|(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^*))^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}^{**}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{**}))\| \\ &\leq \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^{**} - \mathbf{x}^*\|^2 < \|\mathbf{x}^{**} - \mathbf{x}^*\|. \end{aligned}$$

Somit ist \mathbf{x}^* einzige Nullstelle von \mathbf{f} in $K_r(\mathbf{x}^*)$. ■

Das gedämpfte Newton-Verfahren.

- Das Newton-Verfahren konvergiert zwar quadratisch, aber nur **lokal**.
- **Globale** Konvergenz kann ggf. durch einen Dämpfungsterm erreicht werden:

Algorithmus (Gedämpftes Newton-Verfahren):

(1) **FOR** $k = 0, 1, 2, \dots$

(2a) **Löse** $\mathbf{J}f(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta\mathbf{x}^k = -f(\mathbf{x}^k)$;

(2b) **Setze** $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta\mathbf{x}^k$;

Frage: Wie wählt man die **Dämpfungsfaktoren** λ_k ?

Strategie: Verwende eine **Testfunktion** $T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$, womit gilt

$$T(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

$$T(\mathbf{x}) = 0 \quad \iff \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Wahl des Dämpfungsparameters.

Wähle nun $\lambda_k \in (0, 1]$, so dass die Folge $T(\mathbf{x}^k)$ streng monoton fällt, d.h.

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1})\| < \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\| \quad \text{für } k \geq 0.$$

- *In der Nähe* der gesuchten Lösung \mathbf{x}^* sollte $\lambda_k = 1$ gewählt werden, um (lokale) quadratische Konvergenz zu sichern.

Der folgende Satz garantiert die Existenz eines Dämpfungsparameters.

Satz: Sei \mathbf{f} eine C^1 -Funktion auf der offenen und konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Für $\mathbf{x}^k \in D$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$ gibt es dann ein $\mu_k > 0$, so dass

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda \Delta \mathbf{x}^k)\|_2^2 < \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2^2 \quad \text{für alle } \lambda \in (0, \mu_k).$$

Beweis: Betrachte die C^1 -Funktion

$$\varphi(\lambda) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda\Delta\mathbf{x}^k)\|_2^2$$

für $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$, mit $\epsilon > 0$.

Dann gilt

$$\varphi(0) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2^2 > 0$$

sowie

$$\varphi'(0) = 2(\mathbf{f}(\mathbf{x}^k))^T \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k = -2(\mathbf{f}(\mathbf{x}^k))^T \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) < 0.$$

Somit fällt die Funktion $\varphi(\lambda)$ *streng monoton* in einem (hinreichend kleinen) Intervall um Null, $(0, \mu)$, wo gilt

$$\varphi(0) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2^2 > \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda\Delta\mathbf{x}^k)\|_2^2 = \varphi(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda \in (0, \mu).$$



Dämpfungsstrategie.

Für die Startiteration: $k = 0$.

Wähle

$$\lambda_0 \in \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \lambda_{\min} \right\}$$

möglichst groß, so dass gilt

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2 > \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda_0 \Delta \mathbf{x}^k)\|_2$$

Dämpfungsstrategie.

Für nachfolgende Iterationen: $k > 0$.

- Setze $\lambda_k = \lambda_{k-1}$.

IF $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2 > \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k)\|_2$ **THEN**

- $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k$
- $\lambda_k := 2\lambda_k$, falls $\lambda_k < 1$.

ELSE

- Bestimme $\mu = \max\{\lambda_k/2, \lambda_k/4, \dots, \lambda_{\min}\}$ mit

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2 > \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k)\|_2$$

- $\lambda_k := \mu$

END

Nichtlineare Ausgleichsprobleme.

Aufgabenstellung: Minimiere Funktion

$$g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|_2^2 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ **Messdaten**, $m \gg n$, und

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(t_1; x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f(t_m; x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Werte der **Ansatzfunktion**

$$y = f(t; x_1, \dots, x_n)$$

zu (verschiedenen) **Messzeiten** t_1, \dots, t_m und

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

gesuchte **Parameter** der Ansatzfunktion.

Konstruktion des Gauß-Newton-Verfahrens.

Startpunkt: Sei $\mathbf{x}^0 \approx \mathbf{x}^*$ Näherung an Lösung \mathbf{x}^* des Minimierungsproblems.

Konstruktion: Dann gilt mit Taylor-Entwicklung um \mathbf{x}^0 in erster Näherung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{JF}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) - \mathbf{y}\|_2^2$$

Algorithmus (Gauß-Newton-Verfahren):

(1) FOR $k = 0, 1, 2, \dots$

(2a) Löse Minimierungsaufgabe

$$\|\mathbf{JF}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k - (\mathbf{y} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^k))\|_2^2 \longrightarrow \min_{\Delta\mathbf{x}^k}$$

durch **lineare Ausgleichsrechnung**.

(2b) Setze $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k$;

Beispiel.

Betrachte Ansatzfunktion

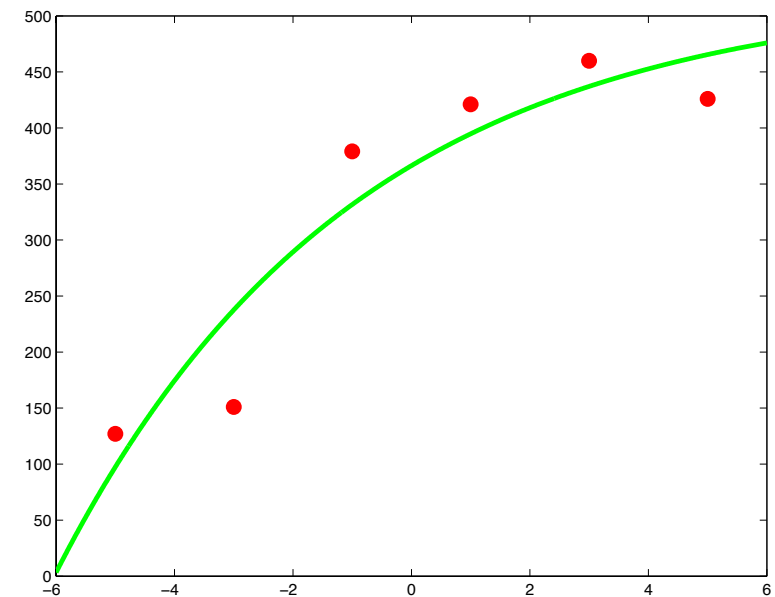
$$y = f(t, \mathbf{x}) = x_1 + x_2 \cdot \exp(tx_3)$$

und Messdaten

t_i	-5	-3	-1	1	3	5
y_i	127	151	379	421	460	426

Für Startwert $x_1^0 = 300$, $x_2^0 = -1$, $x_3^0 = -0.3$
liefert Gauss-Newton nach 13 Iterationen

$$x_1^* = 523.306 \quad x_2^* = -156.948 \quad x_3^* = -0.199665$$



19 Integralrechnung mehrerer Variabler

19.1 Bereichsintegrale

Gegeben sei eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von $f(\mathbf{x})$:

$$V = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Erinnerung Analysis II: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober- und Untersumme definiert, falls diese Grenzwerte jeweils existierten und übereinstimmten. \square

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale.

Vorgehensweise: Analog dem eindimensionalen Fall.

Aber: der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Startpunkt: Betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2,$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck).

Weiterhin sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition: Man nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine **Zerlegung** des Quaders $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b_2$$

Mit $\mathbf{Z}(D)$ wird die **Menge der Zerlegungen** von D bezeichnet. □

Zerlegungen und Riemannsche Summen.

Definition:

- Die **Feinheit** einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\|Z\| := \max_{i,j} \{ |x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j| \}$$

- Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die **Teilquader** der Zerlegung Z . Das **Volumen** des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\text{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

- Für beliebige Punkte $\mathbf{x}_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

eine **Riemannsche Summe** zur Zerlegung Z . □

Riemannsche Ober- und Untersummen.

Definition: Analog zum Integral einer Variablen heißen für eine Zerlegung Z

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \text{vol}(Q_{ij})$$

die **Riemannsche Untersumme** bzw. **Riemannsche Obersumme** von $f(\mathbf{x})$. \square

Bemerkung: Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter- und Obersumme dieser Zerlegung, d.h. es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

\square

Bemerkung.

Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j , so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

Frage: Was passiert mit den Unter- und Obersummen im Grenzwert $\|Z\| \rightarrow 0$:

$$U_f := \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

$$O_f := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

Beobachtung: Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter- und Obersumme monoton und beschränkt sind. □

Riemannsche Ober- und Unterintegrale.

Definition:

- **Riemannsches Unterintegral** bzw. **Riemannsches Oberintegral** der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D ist gegeben durch

$$\int_{\underline{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \sup\{U_f(Z) \mid Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

$$\int_{\overline{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

- Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man **Riemann-integrierbar** über D , falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Das **Riemann-Integral** von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann gegeben durch

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_{\underline{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\overline{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

Bemerkung.

Wir haben bis jetzt “nur” den Fall von **zwei** Variablen betrachtet:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2.$$

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: für $n = 2$ und $n = 3$

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{bzw.} \quad \int_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

oder auch

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{bzw.} \quad \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

□

Elementare Eigenschaften des Integrals.

Satz:

- **Linearität**

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

- **Monotonie**

Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

- **Positivität**

Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) \geq 0$, d.h. $f(\mathbf{x})$ ist **nichtnegativ**, so folgt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq 0$$

□

Weitere Eigenschaften des Integrals.

Satz:

- Sind D_1 , D_2 und D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\text{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(\mathbf{x})$ genau dann über D integrierbar, falls $f(\mathbf{x})$ über D_1 und über D_2 integrierbar ist, und es gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

- Für das Integral gilt die **Abschätzung**

$$\left| \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x})| \cdot \text{vol}(D)$$

- **Riemannsches Kriterium**

$f(\mathbf{x})$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

□

Der Satz von Fubini.

Satz (Satz von Fubini): Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Quader, und existieren die Integrale

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \quad \text{und} \quad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. für alle $y \in [a_2, b_2]$, so gelten

$$\begin{aligned} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \, dx \\ \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Bedeutung:

Der Satz von Fubini ermöglicht Reduktion auf eindimensionale Integration. \square

Beweis des Satzes von Fubini: Sei $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine beliebige Zerlegung von D , so gelten für beliebige $y \in [y_j, y_{j+1}]$ und $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ die Abschätzungen

$$\inf_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \leq f(\xi_i, y) \leq \sup_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}),$$

und somit (per Integration über $[y_j, y_{j+1}]$)

$$\inf_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x})(y_{j+1} - y_j) \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) dy \leq \sup_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x})(y_{j+1} - y_j).$$

Durch Multiplikation mit $(x_{i+1} - x_i)$ und anschließender Summation folgt

$$U_f(Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y) dy \right) (x_{i+1} - x_i) \leq O_f(Z).$$

Mit dieser Riemannschen Summe von $F(x)$ zu $Z_x = \{x_0, \dots, x_n\}$ bekommt man

$$U_f(Z) \leq U_F(Z_x) \leq O_F(Z_x) \leq O_f(Z).$$

Für $\|Z\| \rightarrow 0$ folgt die erste Behauptung, die zweite zeigt man analog. ■

Beispiel.

Gegeben sei der Quader $D = [0, 1] \times [0, 2]$ sowie die Funktion

$$f(x, y) = 2 - xy$$

Stetige Funktionen sind – wie wir gleich zeigen werden – über Quadern integrierbar. Daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^1 f(x, y) \, dx dy = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2} \right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = 3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini verlangt als Voraussetzung die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht!** □

Die charakteristische Funktion.

Definition: Für $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt setzen wir

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \text{ falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \text{ falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

Speziell für $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ heißt $f^*(\mathbf{x})$ die **charakteristische Funktion** von D . Die charakteristische Funktion von D wird mit $\chi_D(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Sei nun Q der kleinste Quader mit $D \subset Q$. Dann heißt die Funktion $f(\mathbf{x})$ **integrierbar** über D , falls $f^*(\mathbf{x})$ über Q integrierbar ist, und wir setzen

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

Messbarkeit und Nullmengen.

Definition: Die kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **messbar**, falls das Integral

$$\text{vol}(D) := \int_D 1 \, d\mathbf{x} = \int_Q \chi_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

existiert. Man nennt dann $\text{vol}(D)$ das **Volumen** von D im \mathbb{R}^n .

Die kompakte Menge D heißt **Nullmenge**, falls D messbar ist mit $\text{vol}(D) = 0$. \square

Bemerkungen:

- Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $Q = D$, und somit gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

d.h. die eingeführten Integrationsbegriffe stimmen überein.

- Quader sind messbare Mengen.
- $\text{vol}(D)$ ist in diesem Fall das *tatsächliche* Volumen des Quaders D im \mathbb{R}^n . \square

Drei wichtige Eigenschaften der Integration.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist D genau dann messbar, falls der Rand ∂D von D eine Nullmenge ist. □

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(\mathbf{x})$ integrierbar über D . □

Satz (Mittelwertsatz): Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, zusammenhängend und messbar, und ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es einen Punkt $\xi \in D$ mit

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot \text{vol}(D).$$

□

Normalbereiche.

Definition:

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein **Normalbereich**, falls es stetige Funktionen g, h bzw. \bar{g}, \bar{h} gibt mit

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \text{ und } \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heißt **Normalbereich**, falls es eine Darstellung

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a \leq x_i \leq b ; g(x_i) \leq x_j \leq h(x_i) ; \varphi(x_i, x_j) \leq x_k \leq \psi(x_i, x_j)\}$$

gibt mit einer Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ . □

Projizierbare Mengen.

Definition: Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in Richtung x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen φ, ψ gibt, so dass

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^T \in B \text{ und } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}})\}.$$

□

Bemerkung:

- Projizierbare Mengen sind stets messbar. Damit sind auch alle Normalbereiche messbar, denn Normalbereiche sind projizierbar.
- Häufig lässt sich der Integrationsbereich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Bereiche sind ebenfalls messbar.

□

Beobachtung.

Satz: Ist $f(\mathbf{x})$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x) \},$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Beweis: Sei $Q = [a, b] \times [c, d]$ das kleinste Rechteck mit $D \subset Q$, also

$$c = \inf_{x \in [a, b]} g(x) \quad \text{und} \quad d = \sup_{x \in [a, b]} h(x)$$

und somit

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$



Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen.

Bemerkung: Analoge Beziehungen gelten für höhere Dimensionen:

Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine projizierbare Menge in Richtung x_i , d.h. D besitzt eine Darstellung der Form

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^T \in B \text{ und } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}})\},$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_B \left(\int_{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})}^{\psi(\tilde{\mathbf{x}})} f(\mathbf{x}) \, dx_i \right) d\tilde{\mathbf{x}}.$$

□

Beispiel.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := x + 2y$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

$$D := \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ und } x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

Die Menge D ist ein Normalbereich und $f(x, y)$ ist stetig, somit

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, d\mathbf{x} &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} (x + 2y) \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{x^2}^{2-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x(2 - x^2) + (2 - x^2)^2 - x^3 - x^4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4) dx = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

□

Beispiel.

Zu berechnen sei das Volumen des **Rotationsparaboloids**

$$V := \{(x, y, z)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Darstellung von V als **Normalbereich**:

$$V = \{(x, y, z)^T \mid -1 \leq x \leq 1 ; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} ; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 dz dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[(1-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 + \frac{3}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin(x) \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

Integration über allgemeine Integrationsbereiche.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und messbare Menge. Man nennt $Z = \{D_1, \dots, D_m\}$ eine **allgemeine Zerlegung** von D , falls die Mengen D_k kompakt, messbar und zusammenhängend sind und falls gilt

$$\bigcup_{k=1}^m D_k = D \quad \text{und} \quad D_i^{\circ} \cap D_j^{\circ} = \emptyset \quad \text{für alle } i \neq j.$$

Weiterhin heißt

$$\text{diam}(D_k) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_k\}$$

der **Durchmesser** der Menge D_k und

$$\|Z\| := \max\{\text{diam}(D_k) \mid 1 \leq k \leq m\}$$

die **Feinheit** der allgemeinen Zerlegung Z . □

Riemannsche Summen für allgemeine Zerlegungen.

Für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man die **Riemannschen Summen**

$$R_f(Z) = \sum_{j=1}^m f(\mathbf{x}^j) \text{vol}(D_j)$$

mit beliebigen $\mathbf{x}^j \in D_j$, $j = 1, \dots, m$.

Satz: Für jede Folge $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ allgemeiner Zerlegungen von D mit $\|Z_k\| \rightarrow 0$ (für $k \rightarrow \infty$) und für jede Folge zugehöriger Riemannscher Summen $R_f(Z_k)$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_f(Z_k) = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

□

Schwerpunkte von Flächen und Körpern.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $D \subset \mathbb{R}^3$) eine messbare Menge und $\rho(\mathbf{x})$, für $\mathbf{x} \in D$, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der **Schwerpunkt** der Fläche (bzw. des Körpers) D gegeben durch

$$\mathbf{x}_s := \frac{\int_D \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \, d\mathbf{x}}{\int_D \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}.$$

Zählerintegral (über vektorwertige Funktion) koordinatenweise zu berechnen. \square

Beispiel.

Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide

$$P := \left\{ (x, y, z)^T \mid \max(|y|, |z|) \leq \frac{ax}{2h}, \quad 0 \leq x \leq h \right\}$$

Berechne das Volumen von P unter Annahme konstanter Dichte wie folgt.

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz dy dx \\ &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h} dy dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h} \right)^2 dx = \frac{1}{3} a^2 h. \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dz dy dx &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{bmatrix} \frac{ax^2}{h} \\ \frac{axy}{h} \\ 0 \end{bmatrix} dy dx \\
 &= \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{a^2 x^3}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} a^2 h^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von P liegt daher im Punkt $\mathbf{x}_s = \left(\frac{3}{4}h, 0, 0\right)^T$. □

Trägheitsmomente von Flächen und Körpern.

Definition (**Trägheitsmoment bezüglich einer Achse**): Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $D \subset \mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$ bezeichne für $\mathbf{x} \in D$ eine Massendichte und $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punktes $\mathbf{x} \in D$ von einer vorgegebenen Drehachse. Dann besitzt D bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment

$$\Theta := \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

□

Beispiel. Berechnen das Trägheitsmoment des homogenen Zylinders

$$Z := \{ (x, y, z)^T : x^2 + y^2 \leq r^2, -\ell/2 \leq z \leq \ell/2 \}$$

bezüglich der x -Achse bei konstanter Dichte ρ wie folgt.

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_Z \rho(y^2 + z^2) d(x, y, z) \\ &= \rho \int_Z (y^2 + z^2) d(x, y, z) \\ &= \rho \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= \rho \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(\ell y^2 + \frac{\ell^3}{12} \right) dy dx \\ &= \rho \frac{\pi \ell r^2}{12} (3r^2 + \ell^2) \end{aligned}$$

□

Der Transformationsatz.

Ziel: Verallgemeinerung der (eindimensionalen) **Substitutionsregel**

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Satz (Transformationsatz): Sei $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1 -Abbildung. $D \subset U$ sei eine kompakte messbare Menge, so dass Φ auf D° einen C^1 -Diffeomorphismus bildet. Dann ist auch $\Phi(D)$ kompakt und messbar und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt die **Transformationsformel**

$$\int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u})) |\det \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})| d\mathbf{u}.$$

□

Bemerkung: Man beachte, dass im Transformationsatz die Bijektivität von Φ nur auf im Inneren D° von D gefordert wird – nicht jedoch auf dem Rand ∂D ! □

Beispiel.

Berechne den Schwerpunkt eines homogenen **Kugeloktanten**

$$V = \{(x, y, z)^T \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } x, y, z \geq 0\}$$

Es ist einfacher, den Schwerpunkt in **Kugelkoordinaten** zu berechnen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \psi \\ r \sin \varphi \cos \psi \\ r \sin \psi \end{bmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Die Transformation Φ ist auf ganz \mathbb{R}^3 definiert und mit

$$D = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt $\Phi(D) = V$. Weiterhin ist Φ auf D^0 ein C^1 -Diffeomorphismus mit

$$\det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos \psi.$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit dem Transformationssatz gilt

$$\text{vol}(V) = \int_V d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \psi \, d\psi d\varphi dr = \frac{\pi}{6}$$

und

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) \cdot \bar{x}_s &= \int_V x \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi \cos \psi) r^2 \cos \psi \, d\psi d\varphi dr \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi \, d\psi = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Daraus folgt $\bar{x}_s = \frac{3}{8}$. Analog berechnet man $\bar{y}_s = \bar{z}_s = \frac{3}{8}$. □

Der Steinersche Satz.

Satz (Steinerscher Satz): Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S.$$

Hierbei ist S die zu A parallele Achse durch den Schwerpunkt \mathbf{x}_S des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes \mathbf{x}_S von der Achse A .

Beweis: Wende die Verschiebung $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_S + \mathbf{u}$ an. Dann hat die verschobene Menge $D = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S \mid \mathbf{x} \in K\}$ den Schwerpunkt Null, d.h. es gilt

$$\int_D \mathbf{u} \, d\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Fortsetzung des Beweises.

Nun bezeichne \mathbf{a} den Einheitsvektor in Richtung der Achse A . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \Theta_A &= \rho \int_K (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle^2) \, d\mathbf{x} \\
 &= \rho \int_D (\langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{x}_s + \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle^2) \, d\mathbf{u} \\
 &= \rho \int_D (\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s \rangle + 2 \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\
 &\quad - \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{a} \rangle^2 - 2 \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle^2) \, d\mathbf{u} \\
 &= \rho \left\{ \int_D (\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s \rangle - \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{a} \rangle^2) \, d\mathbf{u} \right. \\
 &\quad + \int_D (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle^2) \, d\mathbf{u} \\
 &\quad \left. + \int_D 2 \langle \mathbf{x}_s - \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{u} \right\} \\
 &= m d^2 + \Theta_S \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Beispiel. Berechnen das Integral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

durch Berechnung eines Flächenintegrals wie folgt. Es gilt

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$$

für

$$I_R = \int_{[0,R] \times [0,R]} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y).$$

Bezeichnet K_ρ den Viertelkreis im 1. Quadrant mit Radius ρ , so gilt

$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \leq I_R \leq \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y).$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die Integrale über K_ρ berechnet man nun über Polarkoordinaten:

$$\int_{K_\rho} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \int_0^\rho \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi dr = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-\rho^2})$$

und somit gelten die Abschätzungen

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

und hiermit gilt schließlich

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \frac{\pi}{4},$$

d.h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

19.2 Kurvenintegrale

Für eine stückweise C^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und eine stetige *skalare* Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir das **Kurvenintegral 1. Art** definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet. Weiterhin heißt

$$ds := \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

das **Bogenelement** der Kurve $\mathbf{c}(t)$.

Erweiterung: Kurvenintegrale über *vektorwertige* Funktionen, d.h.

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := ? \quad \text{für } \mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Anwendung: Ein Massenpunkt bewegt sich entlang $\mathbf{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Frage: Welche *physikalische Arbeit* muss entlang der Kurve geleistet werden?

Kurvenintegrale zweiter Art.

Definition: Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und eine stückweise C^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ definieren wir das **Kurvenintegral**

2. Art durch

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt$$

□

Herleitung: Approximiere die Kurve durch Streckenzug mit Ecken $\mathbf{c}(t_i)$, wobei

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist. Dann gilt für die in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$ geleistete Arbeit die Näherungsformel:

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_i)), \mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i) \rangle.$$

□

Fortsetzung der Herleitung.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i)) (\mathbf{c}_j(t_{i+1}) - \mathbf{c}_j(t_i)) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i)) \dot{\mathbf{c}}_j(\tau_{ij}) (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \rightarrow 0$ konvergiert die rechte Seite gegen das oben definierte **Kurvenintegral 2. Art**

$$\int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt.$$

Bemerkung: Für eine geschlossene Kurve $\mathbf{c}(t)$, d.h. $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, schreibt man

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals zweiter Art.

(a) **Linearität:**

$$\int_{\mathbf{c}} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \beta \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

(b) Es gilt:

$$\int_{-\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei $(-\mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$, den inversen Weg bezeichnet.

(c) Es gilt:

$$\int_{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ den aus \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 zusammengesetzten Weg bezeichnet, so dass der Endpunkt von \mathbf{c}_1 der Anfangspunkt von \mathbf{c}_2 ist. \square

Weitere Eigenschaften des Kurvenintegrals 2. Art.

(d) Das Kurvenintegral 2. Art ist **parametrisierungsinvariant**.

(e) Es gilt:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{T}(t) \rangle \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt = \int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

mit dem **Tangenten-Einheitsvektor** $\mathbf{T}(t) := \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ für $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq 0$.

(f) Formale Schreibweise:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \, dx_i = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) \, dx_i$$

mit

$$\int_{\mathbf{c}} f_i(\mathbf{x}) \, dx_i := \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_i(t) \, dt$$

Beispiel.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (-y, x, z^2)^\top$$

$$\mathbf{c}(t) := (\cos(t), \sin(t), at)^\top \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}} (-y \, dx + x \, dy + z^2 \, dz) \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin(t))(-\sin(t)) + \cos(t) \cos(t) + a^2 t^2 a] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + a^3 t^2) \, dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3} (2\pi)^3 \end{aligned}$$

□

Die Zirkulation eines Feldes längs einer Kurve.

Definition: Ist $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral

$$\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

entlang einer geschlossenen Kurve die **Zirkulation** des Feldes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. □

Beispiel: Für das Feld $\mathbf{u}(x, y) = (y, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (r \cos(t), 1 + r \sin(t))^\top$, $0 \leq t \leq 2\pi$, die Zirkulation

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r \sin(t))(-r \sin(t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r \sin(t) - r^2 \sin^2(t)) \, dt \\ &= \left[r \cos(t) - \frac{r^2}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \right]_0^{2\pi} = -\pi r^2 \end{aligned}$$

□

Wirbelfreie Vektorfelder.

Definition: Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **wirbelfrei**, falls dessen Kurvenintegral längs **aller** geschlossenen stückweise C^1 -Kurven $\mathbf{c}(t)$ in D verschwindet, d.h.

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen } \mathbf{c}.$$

□

Bemerkung: Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve \mathbf{c} abhängt. In diesem Fall nennt man das Kurvenintegral **wegunabhängig**. □

Frage: Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **garantieren** die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

Zusammenhängende Gebiete.

Definition: Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise C^1 -Kurve verbunden werden können:

$$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 \in D : \exists \mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D \quad : \quad \mathbf{c}(a) = \mathbf{x}^0 \wedge \mathbf{c}(b) = \mathbf{y}^0$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein **Gebiet** in \mathbb{R}^n . □

Bemerkung: Eine **offene** Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **nicht** zusammenhängend, wenn es **disjunkte**, offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$U_1 \cap D \neq \emptyset, \quad U_2 \cap D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cup U_2$$

Nicht zusammenhängende offene Mengen sind also

– im Gegensatz zu zusammenhängende Mengen –

in (zumindest) zwei disjunkte offene Mengen trennbar. □

Gradientenfelder, Stammfunktionen, Potentiale.

Definition: Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nennt man ein **Gradientenfeld**, falls es eine skalare C^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x}).$$

Die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ heißt dann **Stammfunktion** oder **Potential** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, und das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nennt man **konservativ**. \square

Bemerkung: Ein Massenpunkt bewege sich in einem **konservativen** Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, d.h. \mathbf{K} besitzt ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so dass $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})$. Dann liefert die Funktion $U(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ die **potentielle Energie**

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x})$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathbf{x}}$, so folgt:

$$m\langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + \langle \nabla U(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}} \rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x}) \right) = 0$$

Hauptsatz für Kurvenintegrale.

Satz (Hauptsatz für Kurvenintegrale): Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein stetiges Vektorfeld auf D .

(a) Besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so gilt für alle stückweisen C^1 -Kurven $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{c}(b)) - \varphi(\mathbf{c}(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist wirbelfrei.

(b) Umgekehrt gilt: Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wirbelfrei, so besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein fester Punkt und bezeichnet \mathbf{c}_x (für $\mathbf{x} \in D$) eine beliebige, die Punkte \mathbf{x}^0 und \mathbf{x} verbindende stückweise C^1 -Kurve in D , so ist $\varphi(\mathbf{x})$ gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{c}_x} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \text{const.}$$

□

Beweis des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

(a): Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ Gradientenfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$. Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}} \nabla \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_i(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\varphi(\mathbf{c}(t))) \, dt = \varphi(\mathbf{c}(b)) - \varphi(\mathbf{c}(a)).\end{aligned}$$

(b): Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wirbelfrei. Wir zeigen, dass $\varphi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{c}_x} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ Potential von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 f_1(\mathbf{c}_1(t)) \Delta x_1 \, dt + \int_0^1 f_2(\mathbf{c}_2(t)) \Delta x_2 \, dt \\ &= f_1(\mathbf{x} + \xi_1) \Delta x_1 + f_2(\mathbf{x} + \xi_2) \Delta x_2.\end{aligned}$$

Für $\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0$ bekommt man $f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, somit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})$. ■

Beispiel.

Das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

besitzt das Potential

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2},$$

denn es gilt

$$\nabla U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} (x, y, z)^T = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen C^1 -Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ geleistete Arbeit gilt dann

$$A = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\|\mathbf{c}(a)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{c}(b)\|}.$$

□

Beispiel.

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{bmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz.$$

Für eine C^1 -Kurve $\mathbf{c}(t)$ von $P = (1, 1, 2)$ nach $Q = (3, 5, -2)$ gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \varphi(Q) - \varphi(P) = -9 - 15 = -24$$

Interpretiert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als elektrisches Feld, so gibt das Kurvenintegral zweiter Art die **Spannung** zwischen den beiden Punkten P und Q an. \square

Beispiel.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad (x, y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos(t), \sin(t))^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \end{aligned}$$

$\mathbf{f}(x, y)$ ist somit nicht wirbelfrei und besitzt auf D kein Potential. □

Bedingungen für Potentiale.

Bemerkung: Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, ein C^1 -Vektorfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so folgt:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \operatorname{rot}(\nabla\varphi(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D.$$

Somit ist $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ eine **notwendige Bedingung** für die Existenz eines Potentials.

Definiert man für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, die **skalare** Rotation

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}(x, y)) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y),$$

so ist $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(x, y)) = 0$ auch in zwei Dimensionen eine **notwendige Bedingung**.

Die Bedingung

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$$

ist sogar eine **hinreichende Bedingung**, falls das Gebiet D **einfach zusammenhängend** ist, d.h. keine "Löcher" enthält. \square

Beispiel.

Wir betrachten erneut das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad \text{für } (x, y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die Rotation von $\mathbf{f}(x, y)$ verschwindet.

Allerdings besitzt $\mathbf{f}(x, y)$ auf der Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kein Potential.

Das Gebiet D ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend. □

Der Integralsatz von Green.

Satz (Integralsatz von Green): Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein C^1 -Vektorfeld auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. Weiterhin sei $K \subset D$ kompakt und bezüglich beider Koordinaten projizierbar, so dass K von einer geschlossenen, stückweisen C^1 -Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird. Die Parametrisierung von $\mathbf{c}(t)$ sei so gewählt, dass K stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf). Dann gilt:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_K \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}.$$

Bemerkung: Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche K , die sich in endlich viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbarer Teilbereiche zerlegen lassen, in so genannte **Greensche Bereiche**. \square

Beweis des Greenschen Integralsatzes.

Beweis: Mit den Bezeichnung der vorliegenden Skizze (z.B. im Lehrbuch) gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}} \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}) \, dx \, dy \\ &= \int_c^d [f_2(h(y), y) - f_2(g(y), y)] \, dy \\ &= \oint_c f_2(x, y) \, dy.\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \oint_c f_1(x, y) \, dx,$$

und somit insgesamt

$$\int_{\mathcal{K}} \operatorname{rot}(\mathbf{f}(x, y)) \, d\mathbf{x} = \oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$



Alternative Formulierung des Greenschen Satzes I.

Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

Daraus folgt mit dem Integralsatz von Green die Darstellung

$$\int_{\mathcal{K}} \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial\mathcal{K}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ beschriebene Strömung unter der Bedingung $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. □

Alternative Formulierung des Greenschen Satzes II.

Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor \mathbf{T} durch den **äußeren Normaleneinheitsvektor** $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle ds &= \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) ds = \oint_{\partial K} \left\langle \begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle ds \\ &= \int_K \operatorname{rot} \begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} dx = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) dx \end{aligned}$$

und damit die Beziehung

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) dx = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so beschreibt die rechte Seite den **Gesamtfluss** der Strömung durch den Rand von K . Gilt also $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$, so ist die Strömung **quellenfrei** und **senkenfrei**, d.h. **divergenzfrei**. \square

Nochmal zurück zur Existenz von Potentialen.

Folgerung: Ist $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, so folgt

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

für jede geschlossene stückweise C^1 -Kurve, die einen Greenschen Bereich $B \subset D$ vollständig umrandet. \square

Definition: Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jede geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow D$ stetig innerhalb von D auf einen Punkt in D zusammenziehen lässt. Genauer: Es gibt für ein $\mathbf{x}^0 \in D$ eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$$

mit $\Phi(t, 0) = \mathbf{c}(t)$, für alle $t \in [a, b]$, und $\Phi(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D$ für alle $t \in [a, b]$.

Die Abbildung $\Phi(t, s)$ heißt **Homotopie**. \square

Integrabilitätsbedingung für Potentiale.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein C^1 -Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf D , falls die **Integrabilitätsbedingung**

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^T \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

erfüllt ist, d.h. falls gilt

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \quad \text{für alle } 1 \leq j, k \leq n.$$

□

Bemerkung: Für $n = 2, 3$ stimmt die Integrabilitätsbedingung mit

$$\text{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$$

überein.

□

Beispiel.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{2xy}{r^2} + \sin(z) \\ \log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos(z) \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } r^2 := x^2 + y^2 + z^2,$$

gegeben.

Wir wollen nun untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt.

Die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend. Weiterhin:

$$\text{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

Also besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials.

Es muss gelten: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Demnach folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1(x, y, z) = \frac{2xy}{r^2} + \sin(z)$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x ergibt sich:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \log(r^2) + x \sin(z) + c(y, z)$$

mit einer unbekanntem Funktion $c(y, z)$.

Einsetzen in die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f_2(x, y, z) = \log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

liefert

$$\log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = \log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y.$$

Berechnung des Potentials (Fortsetzung).

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = ze^y$$

und somit gilt

$$c(y, z) = ze^y + d(z)$$

für eine unbekannte Funktion $d(z)$. Wir haben damit:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \log(r^2) + x \sin(z) + ze^y + d(z).$$

Die letzte Bedingung lautet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3(x, y, z) = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos(z)$$

Daraus folgt $d'(z) = 0$, und somit ist das Potential gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \log(r^2) + x \sin(z) + ze^y + c \quad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

□

19.3 Oberflächenintegrale

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in D\}$$

eine **Fläche** bzw. ein **Flächenstück**. Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nennt man dann eine **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** der Fläche F . \square

Beispiel.

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im \mathbb{R}^3 .

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2,$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H .

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = (-r \sin(\varphi), r \cos(\varphi), 0)^T \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = (0, 0, 1)^T$$

von $\mathbf{p}(\varphi, z)$ sind linear unabhängig auf ganz \mathbb{R}^2 . □

Beispiel.

Der Graph einer skalaren C^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{bmatrix} \quad \text{für } \mathbf{u} \in D.$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{bmatrix}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{bmatrix}$$

sind linear unabhängig. □

Die Tangentialebene einer Fläche.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen **tangential** an die Fläche F .

Sie spannen die **Tangentialebene** $T_{\mathbf{x}^0}(F)$ der Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$T_{\mathbf{x}^0}(F) : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0) \quad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Frage: Wie kann man den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

Das Oberflächenintegral eines Flächenstücks.

Definition: Sei $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend. Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das **Oberflächenintegral**

$$\int_{\mathbf{p}(K)} d\sigma := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}$$

Dabei nennt man den Term

$$d\sigma := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u}$$

das **Oberflächenelement** der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$. □

Bemerkung: Das Oberflächenintegral ist **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt direkt aus dem Transformationssatz. □

Beispiel.

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man mit

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z d\sigma = \int_K r d(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dz d\varphi = 2\pi r H.$$

□

Beispiel.

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$,
so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

und

$$O(\mathbf{p}(K)) = \int_{\mathbf{p}(K)} d\mathbf{o} = \int_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2} d(x_1, x_2).$$

□

Beispiel.

Für die Oberfläche des Paraboloids P , gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq 2\},$$

gilt

$$\begin{aligned} O(P) &= \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 2} \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2} \, d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, d\varphi \, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s} \, ds \\ &= \pi \left[\frac{1}{6} (1 + 4s)^{3/2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{6} (27 - 1) \right) = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

□

Bemerkung.

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2.$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2.$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$d\mathbf{o} = \sqrt{EG - F^2} d(u_1, u_2).$$

□

Beispiel. Für das Oberflächenelement der **Sphäre**

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{für } (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt

$$E = r^2 \cos^2(\theta), \quad F \equiv 0, \quad G = r^2.$$

Fortsetzung des Beispiels. Mit

$$E = r^2 \cos^2(\theta), \quad F \equiv 0, \quad G = r^2.$$

folgt aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2} d(u_1, u_2)$$

daher

$$do = r^2 \cos(\theta) d(\varphi, \theta), \quad \text{für } (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Wir können nun die Oberfläche der Kugel wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\theta) d\varphi d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin(\theta) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

□

Oberflächenintegrale erster und zweiter Art.

Definition: Sei $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine C^1 -Parametrisierung einer Fläche $F = \mathbf{p}(K)$, wobei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend ist.

- Für eine stetige Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ ist das **Oberflächenintegral 1. Art** definiert durch

$$\int_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u}$$

- Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist das **Oberflächenintegral 2. Art** definiert durch

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle \, d\mathbf{u}$$

□

Alternative Darstellung für Oberflächenintegrale.

Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art:

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle \, d\mathbf{u} \\ &= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u} \\ &= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \, d\mathbf{o}. \end{aligned}$$

Interpretation der Oberflächenintegrale.

Bemerkung:

- Ist $\rho(\mathbf{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Oberflächenintegral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.
- Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Oberflächenintegral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den **Fluss** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch die Fläche F .
- Ist F eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberfläche eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im \mathbb{R}^3 , so schreiben wir

$$\oint_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma.$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nach außen weist.

□

Der Integralsatz von Gauß.

Satz (Integralsatz von Gauß): Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h. G sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld mit $G \subset D$, so gilt

$$\int_G \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}.$$

Interpretation des Gaußschen Integralsatzes: Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer **inkompressiblen** Strömung, so gilt $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ und daher

$$\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = 0.$$

□

Beispiel.

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und die Kugel

$$K := \{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3$$

und damit

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 3 \cdot \operatorname{vol}(K) = 4\pi.$$

Das entsprechende Oberflächenintegral läßt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. durch die Parametrisierung der Kugel mit Kugelkoordinaten, berechnen. □

Die Formeln von Green.

Satz: (Formeln von Green): Die Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für C^2 -Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

$$\int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma$$
$$\int_G (f\Delta g - g\Delta f) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\sigma$$

Hierbei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis der Greenschen Formeln.

Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, d\mathbf{x} &= \int_G \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma \end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g . ■

Der Integralsatz von Stokes.

Satz (Integralsatz von Stokes): Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$. Weiter sei $F = \mathbf{p}(K)$ eine Fläche in D , $F \subset D$, mit Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, und $K \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Greenscher Bereich. Der Rand ∂K werde durch eine stückweise glatte C^1 -Kurve \mathbf{c} parametrisiert, deren Bild $\tilde{\mathbf{c}}(t) := \mathbf{p}(\mathbf{c}(t))$ dann den Rand ∂F der Fläche F parametrisiert. Die Orientierung der Randkurve $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ sei hierbei so gewählt, dass $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$ in Richtung der Fläche weist. Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{o} = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Beispiel.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

und die geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) \, dt = 2\pi \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir definieren nun eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi, \psi)$$

mit $(\varphi, \psi) \in K = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, d.h. F ist die obere Kugelhälfte.

Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{o} = \oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 2\pi.$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art**:

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\sigma = \int_K \left\langle \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi, \psi))), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} \right\rangle d\varphi d\psi$$

Beachte: Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man rechnet $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (0, 0, 2)^\top$ direkt nach sowie

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos^2(\psi) \\ \sin(\varphi) \cos^2(\psi) \\ \sin(\psi) \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\int_F \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \sin(\psi) \cos(\psi) \, d\varphi d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\psi) \, d\psi = 2\pi.$$

□