

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Prüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $\mathbf{v}^{[i]} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2$ bzw. 3 Potentiale besitzen und geben Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential an.

$$\mathbf{v}^{[1]}(x, y) = (-y, x)^T, \quad D := \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{v}^{[2]}(x, y) = (x^3, y^3)^T, \quad D := \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{v}^{[3]}(x, y, z) = (xy^2 + xz^2, yx^2 + yz^2, zy^2 + zx^2)^T, \quad D := \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{v}^{[4]}(x, y, z) = (-y^2, xy, -2y)^T, \quad D := \mathbb{R}^3.$$

- b) Gegeben ist

$$\mathbf{v}^{[5]}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)^T, \quad D := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\mathbf{v}^{[5]})$ und

$$\oint_{\mathbf{r}} \mathbf{v}^{[5]}(x, y, z) d(x, y, z)$$

entlang des Kreises

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos(2t), 3 \sin(2t), 1) \quad t \in [0, \pi].$$

Besitzt $\mathbf{v}^{[5]}$ ein Potential?

Aufgabe 2)

Berechnen Sie zu den unten angegebenen Kraftfeldern \mathbf{K} und den jeweils angegebenen Kurven \mathbf{r} die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve \mathbf{r} von $\mathbf{r}(a)$ nach $\mathbf{r}(b)$ zu bewegen.

a) $\tilde{\mathbf{K}}(x, y) := \mathbf{v}^{[2]}(x, y) = (x^3, y^3)^T,$

$$\mathbf{r}(t) = \left(t(t-4) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t \right)^T, \quad t \in [a, b] := [0, 4].$$

b) $\hat{\mathbf{K}}(x, y, z) := \mathbf{v}^{[4]}(x, y, z) = (-y^2, xy, -2y)^T$

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), t)^T \quad t \in [a, b] := \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

c) $\mathbf{K}(x, y, z) := (2x + yz, 2y + zx, 2z + xy)^T,$

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sin(t), 1 - \cos^2(t), \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right)^T \quad t \in [a, b] := \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Bearbeitungstermine: 16.01.-20.01.2017