Fachbereich Mathematik **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze

Klausur zur Mathematik III

(Modul: Analysis III)

1. September 2017

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach DPO : zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **3** angegebenen Aufgaben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x^3 + y^3 - 27xy + 25\,.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese. Prüfen Sie also, ob es sich jeweils um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

Tipp: $9^3 = 9 \cdot 81 = 27 \cdot 27 = 729\,.$

b) Zeigen Sie, dass durch $f(x,y) = 0$ in der Umgebung von $P_0 = (1,1)$ implizit eine Funktion $y(x)$ definiert ist. Es gilt also lokal

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x) \qquad \text{mit } g(1) = 1\,.$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades der Funktion $g(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1\,.$

Lösung:

a) (5 Punkte)

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 27y \overset{!}{=} 0 \iff x^2 = 9y$$
$$f_y(x,y) = 3y^2 - 27x \overset{!}{=} 0 \iff y^2 = 9x \iff x = \frac{y^2}{9}$$

Es gilt also

$$\frac{y^4}{9^2} = 9y \iff y^4 - 9^3 y = 0 \iff y = 0 \lor y = 9\,.$$

Damit erhalten wir zwei stationäre Punkte $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (9,9)\,.$ [**2 Punkte**]

$$H\,f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -27 \\ -27 & 6y \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$
$$H\,f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -27 \\ -27 & 0 \end{pmatrix}, \quad H\,f(9,9) = \begin{pmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 54 \end{pmatrix}.$$

Für die Eigenwerte der Hesse Matrix von P_1 gilt

$$\lambda^2 - 27^2 = 0 \implies \lambda = \pm 27$$

Hier liegt ein Sattelpunkt vor. [**1 Punkt**]

Für die Hesse Matrix von P_2 gilt

– Hauptunterdeterminanten der Hesse Matrix sind positiv,

– alternativ: Gerschgorin

– alternativ: Eigenwerte berechnen

$$(54 - \lambda)^2 - 27^2 = 0 \iff 54 - \lambda = \pm 27 \implies \lambda = 54 \pm 27 > 0$$

In P_2 wird also ein (lokales) Minimum der Funktion. [**1 Punkt**]

b) Es gilt $f(1,1) = 0$ und $f_y(1,1) = 3 - 27 \neq 0$.

Daher gibt es lokal eine Funktion g mit

$f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$ mit $g(1) = 1$. **[1 Punkt]**

Darüber hinaus gilt $g'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\frac{-24}{-24} = -1$. **[1 Punkt]**

Implizietes Differenzieren liefert

$$F(x,g(x)) = x^3 + g(x)^3 - 27xg(x) + 25 = 0 \implies \frac{dF}{dx} = F'(x,g(x)) = 0$$

$$F'(x,g(x)) = 3x^2 + 3g(x)^2 g'(x) - 27g(x) - 27xg'(x) = 0 \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$F''(x,g(x)) = 6x + 6g(x)(g'(x))^2 + 3g(x)^2 g''(x) - 27g'(x) - 27g'(x) - 27xg''(x) = 0\,.$$

In die letzte Gleichung setzen wir $x = g(x) = 1$ und $g'(x) = -1$ ein:

$$6 + 6 + 3g''(1) - 54(-1) - 27g''(1) = 0 \implies g''(1) = \frac{66}{24} = \frac{11}{4}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Und damit

$$T_2(x;1) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{1}{2}g''(1)(x-1)^2 = 1 - (x-1) + \frac{11}{8}(x-1)^2\,.$$

[1 Punkt]

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \le x^2 + y^2 \le 1, \, x^2 + y^2 \le z \le 1 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z) \, d(x, y, z)$.

b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie Parametrisierungen von D und M an und berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch D, also

$$\int_D \boldsymbol{f} \cdot dO.$$

c) Wie groß ist nach a) und b) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K, also

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO\,?$$

Lösung:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z) \, d(x, y, z) = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z$. **[1 Punkt]**

Parametrisierung von K:

$x = r\cos(\phi), \, y = r\sin(\phi), \, z = z$

$0 \le \phi \le 2\pi, \, 0 \le r \le 1, \, r^2 \le z \le 1$. **[1 Punkt]**

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 (2 + 2z) \cdot r \, dz \, d\phi \, dr \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, \left[2z + z^2\right]_{r^2}^1 d\phi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[3r - 2r^3 - r^5\right] d\phi \, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{6}\right] = \pi \, (3 - 1 - \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}\pi. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Parametrisierung von D:

$p(r, \phi) = (\, r\cos(\phi), \, r\sin(\phi), \, 1)^T, \, 0 \le \phi \le 2\pi, \, 0 \le r \le 1$. **[1 Punkt]**

Parametrisierung von M:

$\tilde{p}(r, \phi) = (\, r\cos(\phi), \, r\sin(\phi), \, r^2)^T, \, 0 \le \phi \le 2\pi, \, 0 \le r \le 1$. **[1 Punkt]**

$$\frac{dp}{dr} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dp}{d\phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dp}{dr} \times \frac{dp}{d\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} \;>= r \cdot f_3(r\cos\phi, r\sin\phi\,, 1) = r \cdot 1^2\,.$$

$$\int_D \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\, d\phi\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \pi\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

c) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich aus a) und b) [**1 Punkt**]

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z) - \int_D \boldsymbol{f} \cdot dO = \frac{5}{3}\pi - \pi = \frac{2}{3}\pi\,.$$