Aufgabe 1) (7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \cos(x) \cdot \ln(1 + y) + 3xy - 2y + 1\,.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.1,\, 0.1] \times [-0.1,\, 0.1]$ gilt:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{4}{1000}\,.$$

Aufgabe 2) (6 Punkte)

Gesucht ist ein Minimum der Funktion

$$f(x, y) := x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x, y) := \cos(x + 1) + \sin(y) - 1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $P_0 = (-1,\, 0)^T$ ein zulässiger Punkt ist, in dem die Regularitätsbedingung erfüllt ist.

b) Weisen Sie nach, dass $P_0 = (-1,\, 0)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

c) Zeigen Sie, dass im Punkt $P_0 = (-1,\, 0)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der gegebenen Nebenbedingung vorliegt.

Aufgabe 3: (3+4 Punkte)

a) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ auf $\mathbb{R}^3$ und die Kurve $\boldsymbol{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ 1 + \sin^2(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ein Potential zu $\boldsymbol{K}$ und die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\boldsymbol{r}$ von $\boldsymbol{r}(0)$ nach $\boldsymbol{r}(\pi)$ zu bewegen.

b) Es sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ z \neq 0 \right\}$ und

$$\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(yz\,,\ -xz\,,\ \frac{x + y}{z} \right)^T.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(x, y, z) d(x, y, z)$$

von $\boldsymbol{f}$ längs der Kurve

$$\boldsymbol{c} : [0\,,\, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{c}(t) = (2 \cdot \cos(t),\, 2 \cdot \sin(t),\, e^t\,)^T.$$