Buch Kap. 5.5 – Partielle Ableitung

Defintion 5.23: Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R},\; D \subset \mathbb{R}^n$, wobei D eine offene Menge ist, gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + he_j) - f(\mathrm{x})}{h},$$

dann ist die Funktion f an der Stelle x partiell differenzierbar nach x_j

und durch den Grenzwert

$$\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{x} + he_j) - f(\mathrm{x})}{h}$$

ist die partielle Ableitung nach x_j von f an der Stelle x definiert.

Buch Kap. 5.5 – Partielle Differenzierbarkeit

Defintion 5.24: $f : D \to \mathbb{R}$ **ist auf** $A \subset D$, A **offen, partiell differenzierbar nach** x_j**, falls** f **in allen Punkten** $x \in A$ **partiell nach** x_j **differenzierbar ist.**

f **ist partiell nach** x_j **differenzierbar, falls** f **auf** D **partiell nach** x_j **differenzierbar ist.**

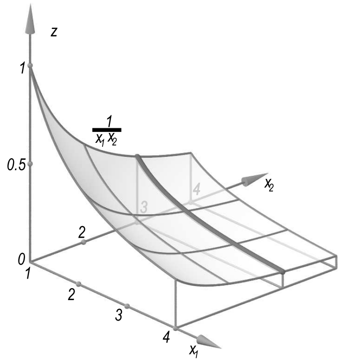
Für die partielle Ableitung nach x_j **wird auch die Bezeichnung** f_{x_j} **verwendet.**

f **heißt partiell differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen existieren.**

Buch Kap. 5.5 – stetige Ppartielle Differenzierbarkeit

Defintion 5.25: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt in D stetig partiell differenzierbar, falls in D alle partiellen Ableitungen existieren und zugleich stetig sind.

Buch Kap. 5.5 – Partielle Ableitung einer Funktion



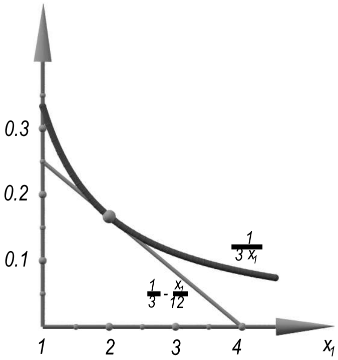


Abbildung 5.16: Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$, Abbildung 5.17: Graph von $f^*(x_1) := f(x_1,3) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an f^*.

Buch Kap. 5.5 – Gradient einer Funktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar.
Der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Gradient der Funktion f bei x.

Die Abbildung $\operatorname{grad} f : D \to \mathbb{R}^n$ ist eine vektorwertige Abbildung, d.h. jedem $\mathbf{x} \in D$ wird mit $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ zugeordnet.

Buch Kap. 5.5 – höhere partielle Ableitungen

Defintion 5.26: Sei $f : D \to \mathbb{R}, \;\; D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f partiell differenzierbar. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

existiert, heißt

$$f_{x_i x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_j und x_i.
Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen $f_{x_i x_j}$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n$, heißt f zweimal partiell differenzierbar.
Höhere partielle Ableitungen ($k-$te partielle Ableitungen oder auch partielle Ableitungen k-ter Ordnung) werden entsprechend rekursiv definiert;

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}(x) =: f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(x), \quad mit \quad 1 \le k \le p,$$

Buch Kap. 5.5 – Satz von Schwarz

Satz 5.3: Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$, $p-$ mal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}, \quad mit \quad 1 < k \leq p,$$

unaghängig von der Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sind dabei beliebige Elemente der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$.

Buch Kap. 5.5 – Partielle Ableitung Vektor Funktion

Defintion 5.27: Sei f : $D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offenen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

f ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar, falls alle f_j ($j = 1,2,\ldots,n$) partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell differenzierbar auf $A \subset D$ bzw. partiell differenzierbar sind.

Buch Kap. 5.6 – Ableitungsmatrix bzw. Jacobi Matrix

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar, dann heißt die Matrix

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Jacobi Matrix bzw. Ableitungsmatrix oder einfach Ableitung von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

Buch Kap. 5.6 – HESSE–Matrix

Die HESSE–Matrix einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$