

Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit von Abbildungen

Definition 5.28: Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt in einem inneren Punkt x_0 von D differenzierbar, falls sie in x_0 partiell differenzierbar ist und in der Form

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + k(x)$$

geschrieben werden kann, wobei $k : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|k(x)|}{|x - x_0|} = 0$$

gilt.

f heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls f in jedem Punkt von A differenzierbar ist. Im Falle $A = D$ heißt f eine differenzierbare Abbildung.

Buch Kap. 5.7 – Differenzierbarkeit versus partielle Diffbarkeit

Satz 5.4: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ist in dem inneren Punkt x_0 aus D differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f in einer Umgebung von x_0 existieren und in x_0 stetig sind.

Buch Kap. 5.8 – Differentiationsregeln

(i) Linearität

Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, differenzierbar in x_0 , so ist auch $\lambda f + \mu g$ (λ und μ reell) in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) .$$

(ii) Kettenregel

Es sei $h : C \rightarrow D$, (mit $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$) differenzierbar in $x_0 \in C$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar im Punkt $z_0 = h(x_0)$.

Dann ist auch $f \circ h : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(x_0) = f'(z_0)h'(x_0) .$$

Buch Kap. 5.8 – Kettenregel

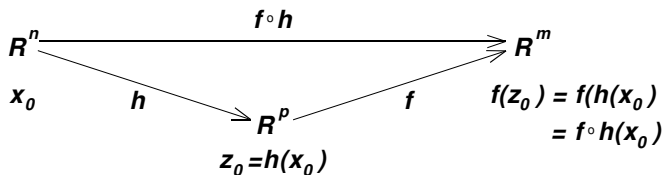


Abbildung 5.18: Verkettete Abbildungen (Kettenregel)

Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

Defintion 5.29: Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)] ,$$

dann nennt man

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)]$$

die Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle \mathbf{x}_0 in Richtung \mathbf{a} .

Buch Kap. 5.8 – Richtungsableitung

Satz 5.5: Sind die partiellen Ableitungen von f in x_0 stetig (woraus die Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung a

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = \text{grad } f(x_0) \cdot a .$$