Buch Kap. 8.6 – Integration über Oberflächen

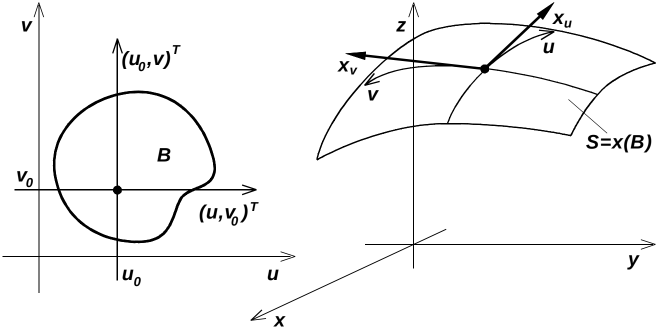

Abbildung 8.20: Reguläres Flächenstück $S = \mathrm{x}(B)$

Buch Kap. 8.6 – Parametrisierung von Flächenstücken

Es seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich. Sei $\mathbf{x} : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die Einschränkung von x auf B wird Parametrisierung eines reguären Flächenstücks genannt, falls

1) **x injektiv ist, und**
2) **für alle $(u, v)^T \in B$**

$$\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0 \text{ erfüllt ist.}$$

Die Punktmenge

$$S := \{\mathbf{x}(u, v) | (u, v)^T \in B\} =: \mathbf{x}(B)$$

ist dann das von der Parameterdarstellung x dargestellte Flächenstück und wird reguläres Flächenstück genannt.

Buch Kap. 8.6 – stückweise reguläre Fläche

Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise reguläre Fläche, wenn es endlich viele reguläre Flächenstücke $S_1, \dots, S_p$ gibt, die höchstens endlich viele reguläre Kurvenstücke ihrer Ränder gemeinsam besitzen und für die

$$S = \cup_{j=1}^{p} S_j$$

gilt.

Buch Kap. 8.6 – Flächeninhalt eines Flächenstücks

Der Flächeninhalt $O(S)$ eines regulären Flächenstücks S, das durch die Parametrisierung $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, $S = \mathbf{x}(B)$ gegeben ist, wird durch

$$O(S) = \int_B |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| dF = \\ = \int_B \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dF$$

definiert.

Dabei bezeichnen E, F und G die metrischen Fundamentalgrößen der Fläche;

- $E := |x_u|^2$,
- $F := x_u \cdot x_v$ **und**
- $G := |x_v|^2$.

Buch Kap. 8.6 – Integration über Oberflächen

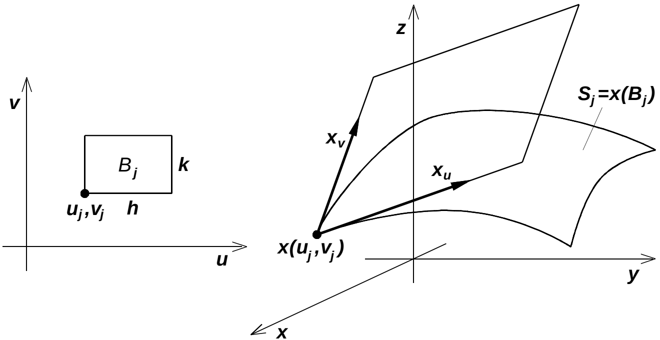

Abbildung 8.23:Übergang von B_j mittels x zu S_j

Buch Kap. 8.6 – Integration über Oberflächen

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S,\ \mathbf{x}(B) = S$. Wenn $f : S \to \mathbb{R}$ eine bschränkte Funktion ist und das Riemann Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v)) |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, dF$$

existiert, so heißt

$$\int_S f \, dO := \int_B f(\mathbf{x}(u,v)) |\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)| \, dF$$

Oberflächenintegral der Funktion f über das reguläre Flächenstück S.