Analysis III

TUHH

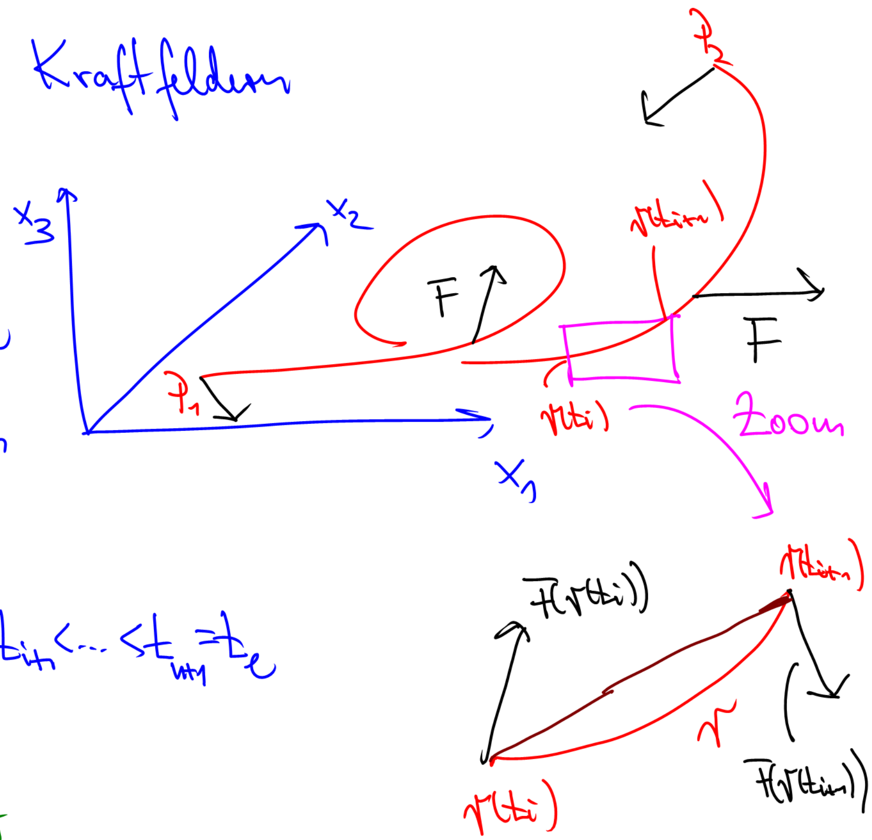
VL 9, 15. Dezember 2016

Vektorcalculus, Arbeitsintegral

Michael Hinze

Arbeit entlang Kurven in Kraftfeldern

Arbeit, welche zu verrichten ist, um Masse P_1 entlang der Kurve γ nach P_2 zu transportieren



$\gamma: [t_a, t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Unterteilung: $t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{n+1} = t_e$

Arbeit = Kraft · Weg

Approximiere γ durch Polygonzug und berechne Arbeit entlang der Segmente $\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$ des Polygonzugs $(i = 0, \dots, n)$

Arbeit entlang der Strecke $[\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$:

$$\Delta W_i = F(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = F(\gamma(t_i)) \frac{\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t_{i+1} - t_i)$$

Gesamtarbeit entlang γ: $W \approx \Delta W_0 + \Delta W_1 + \dots + \Delta W_n$

Es gilt
$$\Delta W_i = F(\gamma(t_i)) \underbrace{\frac{\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)}{t_{i+1}-t_i}}_{\xrightarrow[t_{i+1}\to t_i]{} \dot\gamma(t_i)} (t_{i+1}-t_i)$$

Damit: $\Delta W_0 + \Delta W_1 + \dots + \Delta W_n \simeq$ Riemannsumme des Integrals

$$W := \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt \qquad \Big(= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} F(\gamma(t_i))\cdot\dot\gamma(t_i)\,(t_{i+1}-t_i)}_{\text{Riemannsumme}}\Big)$$

__Def.:__ (Arbeit entlang einer Kurve): $\gamma: [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^3$ diffb. Kurve und $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld (Kraftfeld).

$$\int_\gamma F(x)\cdot dx := \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

heißt Integral von F entlang γ — Kurvenintegral 2ter Art.

Dabei $\quad F\cdot dx = \sum_{i=1}^{n} F_i\,dx_i \quad$ mit $\quad dx = \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$

Kurve geschlossen, d.h. $\gamma(t_a) = \gamma(t_e)$: $\oint_\gamma F(x)\cdot dx$

Beachte: Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung unserer Bahn (= Kurve) im $\mathbb{R}^n$, denn seien γ und $\tilde\gamma$ mit $\tilde\gamma := \gamma\circ\phi$ zwei Parametrisierungen mit $\phi: [t_a, t_e] \to [\tilde t_a, \tilde t_e]$

bijektiv, monoton und diffbar.

$$\int_{\tilde{\gamma}} F(x)\cdot dx = \int_{t_a}^{t_e} F(\tilde{\gamma}(t))\cdot\dot{\tilde{\gamma}}(t)\,dt = \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(\phi(t)))\cdot\dot{\gamma}(\phi(t))\,\dot{\phi}(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{\text{Subst.-Regel},\ \dot{\phi}(t)>0\\ \phi(t_a)=t_a,\\ \phi(t_e)=t_e}}{=} \int_{t_a}^{t_e} F(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt.$$

Rechenregeln

i) "Arbeits" Integral linear; $\int_{\gamma}(aF_1(x)+bF_2(x))\cdot dx$

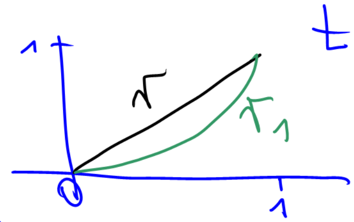
$$= a\int_{\gamma} F_1(x)\cdot dx + b\int_{\gamma} F_2(x)\cdot dx$$

ii) $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t_a+t_e-t)$. Dann

$$\int_{\tilde{\gamma}} F(x)\cdot dx = -\int_{\gamma} F(x)\cdot dx$$

Bsp: $F(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

Dann $\dot{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und damit



$$\int_{\gamma} F(x)\cdot dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 t^3 + t^2\,dt = \frac{7}{12}$$

Sei $r_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^3 \end{bmatrix}$. $\quad \int_{r_1} F(x)\cdot dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^7 \\ t^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{bmatrix} dt = \frac{31}{56}$

Merke: Kurvenintegral wegabhängig!

Frage: Gibt es Vektorfelder (Kraftfelder), in denen die Arbeit wegunabhängig ist?

Ja, denn es gilt

Erster Hauptsatz für Kurvenintegrale: Sei F ein Potentialfeld, d.h.

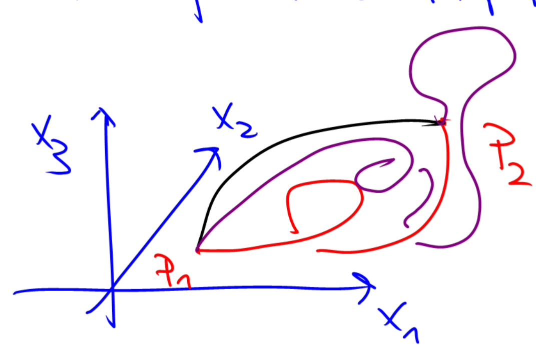
$$F(x) = \nabla \phi(x)$$

mit einem Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_r F(x)\cdot dx = \phi(r(t_e)) - \phi(r(t_a)),$$

d.h. Integral ist unabhängig vom Verlauf der Bahn r im $\mathbb{R}^n$.

$$\int_r F(x)\cdot dx = \int_r F(x)\cdot dx = \int_r F(x)\cdot dx$$



falls F Potentialfeld.

Nachweis: $\int_r F(x)\cdot dx = \int_{t_a}^{t_e} F(r(t))\cdot \dot{r}(t)\, dt$

$$\overset{F=\nabla\phi}{=} \int_{t_a}^{t_e} \nabla\phi(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt = \int_{t_a}^{t_e} \frac{d}{dt}\phi(r(t))\,dt$$

$$\underset{\text{Hauptsatz Differential- \& Integralrechnung.}}{=} \phi(r(t_e)) - \phi(r(t_a)). \qquad \boxed{}$$

2ter Hauptsatz für Potentialfelder: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $F: D \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar. Dann

$$F \text{ Potentialfeld} \iff DF(x) = DF(x)^t \quad \forall_{x\in D},$$

d.h. die Jacobi Matrix ist symmetrisch.

$n=3$ | $DF(x) = DF(x)^t \iff \operatorname{rot} F(x) = 0 \quad \forall_{x\in D}$

Bsp:
$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2x_3^2\cos(x_1x_2) + 2x_1x_2 \\ x_1x_3^2\cos(x_1x_2) + x_1^2 + x_3 \\ 2x_3\sin(x_1x_2) + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

Damit
$$\operatorname{rot} F(x) \overset{\text{Sgl}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2x_3} - F_{3x_2} \\ F_{3x_1} - F_{1x_3} \\ F_{1x_2} - F_{2x_1} \end{bmatrix} \Rightarrow F \text{ Potentialfeld}$$

Hinweis: $n=2$: $\operatorname{rot} F(x) = F_{1x_2} - F_{2x_1}$ (das ist skalar!)

Beachte: $\underbrace{D \text{ einfach zusammenhängend}}_{}$ ist notwendig!

geschlossene Kurven in D sind auf Punkte in D zusammenziehbar.

Denn sei $n=2$, $F(x) := \frac{1}{\|x\|^2}\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (nicht einfach zshgd) und $\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\oint_\gamma F(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \quad (\neq 0).$$ Also kann F kein Potentialfeld sein.

Aber

$$F(x) = \nabla \phi(x) \quad \text{mit} \quad \phi(x) := \arctan \frac{x_2}{x_1} \quad (+c)$$

Ferner

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{-2x_1x_2}{\|x\|^4} & \frac{x_2^2 - x_1^2}{\|x\|^4} \\ \frac{x_2^2 - x_1^2}{\|x\|^4} & -\frac{2x_1x_2}{\|x\|^4} \end{bmatrix} = DF(x)^t$$

Trotzdem ist das "Arbeits" Integral entlang γ nicht 0. einfach weg zshgd ist notwendig im 2ten Hauptsatz.

Wir sagen, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist, falls

$$\nabla f(x) = F(x)$$

(eindeutig bis auf Konstanten)