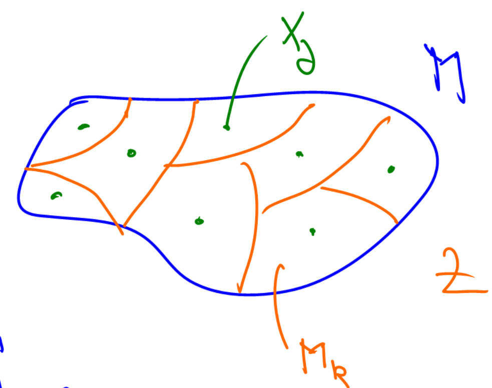
Analysis III
TUHH
VL 11, 12. Januar 2012

Riemann Integral, Integration über Normalbereiche

Michael Hinze

Z Zerlegung von M



$$S(f,Z) := \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\, F(M_j) \quad \text{Riemann'sche Zwischensumme}$$

$$\int_M f(x)\,dx := \lim_{\delta(Z)\to 0} S(f,Z)$$

Praktische Berechnung von Integralen

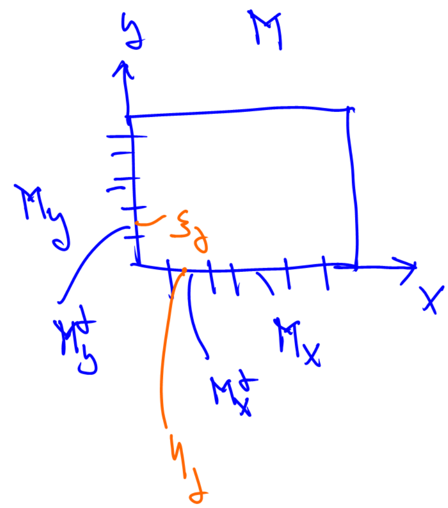
i.) $M = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ mit $a_i < b_i$ $i = 1, \ldots, n$ Produktintervall

Sei $M := M_x \times M_y$ mit $M_x \subset \mathbb{R}^p$, $M_y \subset \mathbb{R}^q$ Produktintervalle. Ferner sei $f: M \to \mathbb{R}$ R-integrierbar

Frage: $\int_M f(z)\,dz = \int_{M_y} \left(\int_{M_x} f(x,y)\,dx \right) dy$? mit $z = (x,y)$, $dz = d(x,y)$

Es gilt: Existiert $g(y) := \int_{M_x} f(x,y)\,dx$ $\forall y \in M_y$, so ist g auf M_y R-integrierbar und es gilt

$$\int_M f(z)\,dz = \int_{M_y} g(y)\,dy = \int_{M_y} \Big(\underbrace{\int_{M_x} f(x,y)\,dx}_{g(y)} \Big)\,dy$$



Beweisidee:

$$\int_{M_y} g(y)\,dy = \sum_j \int_{M_y^j} g(y)\,dy$$

$$= \sum_j g(\xi_j)\,\underbrace{|M_y^j|}_{F(M_y^j)}$$

$$g(\xi_j) = \int_{M_x} f(x,\xi_j)\,dx = \sum_i f(\eta_i,\xi_j)\,|M_x^i|$$

Insgesamt: $\displaystyle\int_{M_y} g(y)\,dy = \sum_j \sum_i f(\eta_i,\xi_j)\,|M_y^j|\,|M_x^i|$ Riemannsumme von $\displaystyle\int_M f(z)\,dz$

$$= \int_M f(z)\,dz,$$ weil f R-integrierbar

Folgerung: $M = \prod_{i=1}^n [a_i,b_i]$. Dann

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M f(x_1,\dots,x_n)\,d(x_1,\dots,x_n)$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \Big(\Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \Big)\,dx_2 \dots \Big)\,dx_n$$

$$= \int_{a_{J(n)}}^{b_{J(n)}} \cdots \Big(\int_{a_{J(1)}}^{b_{J(1)}} f(x_{J(1)},\dots,x_{J(n)})\,dx_{J(1)} \Big)\,dx_{J(2)} \dots \Big)\,dx_{J(n)}$$

$J: \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ Permutation. Reihenfolge der Integration ist also beliebig

Bsp i) $M := [0,1]^3$, $f(x) = x_1 x_2 x_3$; $\int_M f(x)\,dx = ?$

$$\int_M f(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 x_1 x_2 x_3 \, dx_1}_{\frac{1}{2} x_2 x_3} \Big) dx_2 \Big) dx_3$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2} x_2 x_3 \, dx_2}_{\frac{1}{4} x_3} \Big) dx_3 = \int_0^1 \frac{1}{4} x_3 \, dx_3 = \frac{1}{8}$$

ii) $M = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$, $f(x) := x_1 \cos 2x_2$

$$\int_M f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\underbrace{\int_0^1 x_1 \cos 2x_2 \, dx_1}_{\frac{1}{2}\cos 2x_2} \Big) dx_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2x_2 \, dx_2 = \frac{1}{4} \sin 2x_2 \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

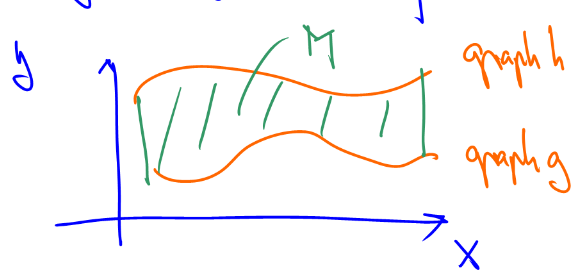
Integration über Normalbereiche

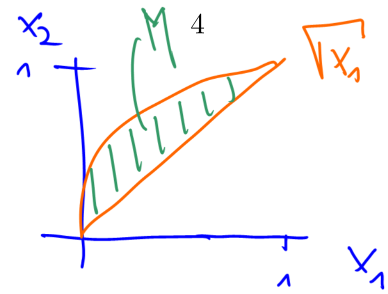
Seien $g, h : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$M := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n ;\ x \in B \text{ und } g(x) \le y \le h(x) \}$$

Dann gilt

$$\int_M f(x,y)\, d(x,y) = \int_B \Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \Big) dx$$





Bsp: i) $M := \{x \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x_1 \le 1,\ x_1 \le x_2 \le \sqrt{x_1}\}$

$B = [0,1]$, $g(z) = z$, $h(z) = \sqrt{z}$

$$\int_M x_1 x_2 \, dx = \int_0^1 \left(\int_{x_1}^{\sqrt{x_1}} x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 x_1 \frac{1}{2} x_2^2 \Big|_{x_1}^{\sqrt{x_1}} dx_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2 - x_1^3 \, dx_1 = \frac{1}{24}$$

ii) $\int_E x_1^2 + x_2^2 \, d(x_1, x_2, x_3)$ mit $E := \{x \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \le 1\}$

Ellipsoid mit Halbachsen a, b, c.

$\parallel$ SgL

$\frac{4}{15} \pi abc \, (a^2 + b^2)$ siehe S. 618 Bärwolff

Transformationsformel für Riemann Integrale

$n = 1$ $\quad \int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt$ mit $\phi : [c,d] \to [a,b]$ bijektiv

Pendant für $\int_M f(x)\, dx$?

Sei $g : \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv und es gelte $\det Dg(x) > 0$ oder $\det Dg(x) < 0$ $\forall x \in G$. $T \subset G$ kompakt, Jordan meßbar und $f : g(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $g(T)$ Jordan meßbar, f auf $g(T)$ R-integrierbar mit

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f(g(t))\,|\det Dg(t)|\,dt$$

Illustration siehe Bärwolff, S587 ff

Bsp Polarkoordinaten in der Ebene

$$R := \{ (r,\varphi) ; r > 0 , 0 \le \varphi < 2\pi \}$$

$$g : R \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} , \quad g(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det Dg(r,\varphi) = r$$