Analysis III
TUHH
VL 12, 19. Januar 2012

Riemann Integral, Transformationsformel, Oberflächenintegral

Michael Hinze

Ziel: Transformationsformel $\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f(g(t))\,|\det Dg(t)|\,dt$

für spezielle Transformationen g beschreiben

i) Polarkoordinaten in der Ebene

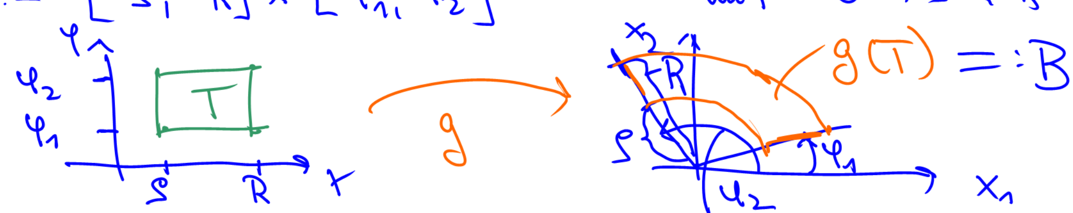
$R = \{(r,\varphi);\ r>0,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ $\quad(r,\varphi)$-Ebene

$$g: R \longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$$
$$(r,\varphi) \longmapsto g(r,\varphi) := \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Damit gilt $D_{(r,\varphi)}\, g(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$, $\det D_{(r,\varphi)} g(r,\varphi) = r$

Anwendung der Transformationsformel:

$T := [\varrho, R] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit $0 < \varrho < R$, $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$

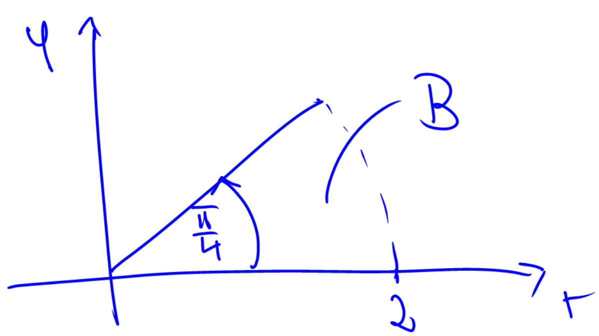


Es ergibt sich

$$\int_B f(x)\,dx = \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \, d(r,\varphi)$$

$$= \int_\rho^R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \, d\varphi\, dr$$

<u>Bsp</u>



$$\int_B x_1 x_2 \, d(x_1,x_2)$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi\, dr$$

$$\vdots$$

$$= 1$$

$$\int_B 1 \, d(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\pi$$

ii) Zylinderkoordinaten $\quad r>0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}_+$

$$g(r,\varphi,z) := \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad Dg(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\det Dg(r,\varphi,z) = r$

iii) $r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ Kugelkoordinaten

$$g(r,\varphi,\theta) := \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\det |Dg(r,\varphi,\theta)| \underset{\text{SgL}}{=} r^2 \cos\theta$$

Damit für $B = g(T)$

i) Zylinderkoordinaten $\displaystyle\int_B f(x)\,dx = \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz$

ii) Kugelkoordinaten $\displaystyle\int_B f(x)\,dx = \int_T f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\, r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$

Zylindervolumen $\displaystyle V = \int_Z 1\,dx = \pi R^2 h$

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz = \pi R^2 h$$

Kugelvolumen $\displaystyle V = \int_K 1\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$

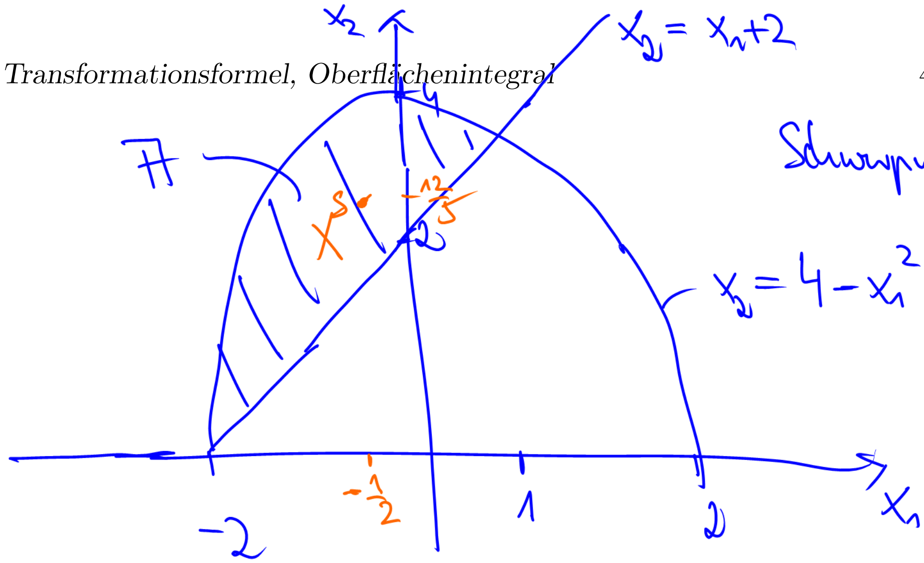
Verallgemeinerte Kugelkoordinaten

$$g(r,\varphi,\theta) := \begin{bmatrix} a\, r\cos\varphi\cos\theta \\ b\, r\sin\varphi\cos\theta \\ c\, r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$a, b, c > 0$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\det Dg(r,\varphi,\theta) = abc\, r^2\cos\theta$,

$\displaystyle V_{\text{Ellipsoid}(a,b,c)} = \int_V 1\,dx = \frac{4}{3}\pi abc \quad (R=1)$



Schwerpunkt x^S von A ?

Schwerpunkt x^S eines Körpers $A \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben als

$$x^S = (x_1^S, x_2^S, \dots, x_n^S)$$

$$x_i^S = \frac{1}{\underbrace{|A|}_{\text{Jordaninhalt}(A)}} \int_A x_i \, d(x_1, \dots, x_n)$$

Bsp oben: Fläche A zwischen $x_2 = 4 - x_1^2$ und $x_2 = x_1 + 2$.

Damit $|A| = \int_{-2}^{1} \int_{x_1+2}^{4-x_1^2} 1 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{9}{2}$

$$x_1^S = \frac{1}{|A|} \int_A x_1 \, d(x_1, x_2) = \frac{2}{9} \int_{-2}^{1} \int_{x_1+2}^{4-x_1^2} x_1 \, dx_2 \, dx_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2^S = \frac{2}{9} \int_A x_2 \, d(x_1, x_2) = \frac{12}{5}, \quad \text{also } x^S = \left(-\frac{1}{2}, \frac{12}{5}\right)$$

Oberflächenintegrale erster und zweiter Art

Ziele: i.) Bestimme Flächeninhalt von Flächen im $\mathbb{R}^3$

ii) Integration von Funktionen auf Flächen (erste Art)

iii) Bestimme Flüsse durch Flächen (zweite Art)

Darstellung von Flächen mittels Parametrisierung (vergleiche Kurven)

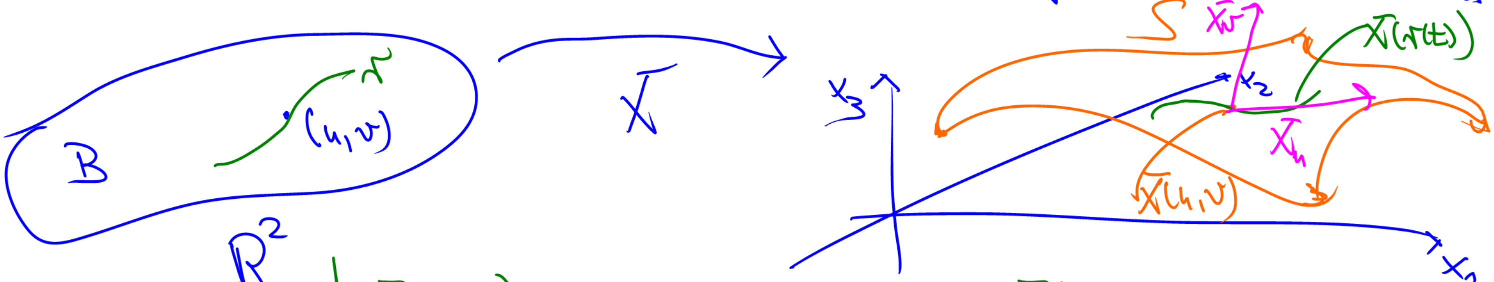
$D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $B \subset D$ regulärer Bereich, $X : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diffbares Vektorfeld

Dann heißt $X(B)$ Parametrisierung eines regulären Flächenstücks, falls

i.) X ist injektiv, d.h. $X(a) = X(b) \Rightarrow a = b$

ii) $X_u(u,v) \times X_v(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in B$

$S := X(B)$ ist das durch X dargestellte Flächenstück.



$$\frac{d}{dt} X(\gamma(t)) = DX(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t) = X_u(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + X_v(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_2(t)$$

$X(\gamma(t))$ verläuft in S, $\frac{d}{dt} X(\gamma(t))$ tangential an S, also auch $X_u(u,v)$ und $X_v(u,v)$, also $X_u(u,v) \times X_v(u,v) \perp S$

Definition Oberflächenintegral erster Art

Voraussetzungen wie oben, $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int_S f(x)\, d\sigma := \int_B f(X(u,v))\, \| X_u(u,v) \times X_v(u,v) \|\, d(u,v)$$