Notizen zur Vorlesung Analysis 3

Henrik Schumacher

TUHH, 26. Januar 2017

12 Integration über Oberflächen

12.1 Oberflächenintegral einer Funktion

Definition 12.37 (Metrische Fundamentalform)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Gebiet und $x\colon B \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung des reguläres Flächenstück $S = x(B)$, d. h. x ist injective auf $B \setminus \partial B$ und für alle Punkte $(u, v) \in B$ ist die 3×2-Matrix $(x_u(u, v), x_v(u, v))$ vom Rang 2 (die Spalten $x_u(u, v)$ und $x_v(u, v)$ sind linear unabhängig).

Die *(erste) metrische Fundamentalform* von S (bezüglich x) an der Stelle $x(u, v)$ ist die symmetrische 2×2-Matrix

$$g(u, v) := \begin{pmatrix} x_u(u, v) \cdot x_u(u, v) & x_u(u, v) \cdot x_v(u, v) \\ x_v(u, v) \cdot x_u(u, v) & x_v(u, v) \cdot x_v(u, v) \end{pmatrix}.$$

Ihre Einträge

$$E(u, v) := \|x_u(u, v)\|^2, \quad F(u, v) := x_u(u, v) \cdot x_v(u, v), \quad G(u, v) := \|x_v(u, v)\|^2,$$

nennt man *metrische Fundamentalgrößen* von S (bezüglich x).

Merkregel 12.38 Man spricht von *metrischen* Fundamentalgrößen, weil sich viele wichtige metrische Begriffe durch sie ausdrücken lassen. Zum Beispiel hat das von den Vektoren $x_u(u, v)$ und $x_v(u, v)$ aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt

$$\|x_u \times x_v\| = \sqrt{\det(g)} = \sqrt{E\,G - F^2}. \tag{1}$$

Dies rechnet man einfach wie folgt nach:

$$\begin{aligned} \|x_u \times x_v\| &= \|x_u\|\,\|x_v\|\,|\sin(\measuredangle(x_u, x_v))| = \|x_u\|\,\|x_v\|\,\sqrt{1 - \cos^2(\measuredangle(x_u, x_v))} \\ &= \sqrt{\|x_u\|^2\,\|x_v\|^2 - \|x_u\|^2\,\|x_v\|^2\,\cos^2(\measuredangle(x_u, x_v))} = \sqrt{\|x_u\|^2\,\|x_v\|^2 - (x_u \cdot x_v)^2}. \end{aligned}$$

Definition 12.39 (Oberflächenintegral einer Funktion)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich, S ein reguläres Flächenstück mit Parametrisierung $x\colon B \to S$ und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir das *Oberflächenintegral von f entlang S* durch

$$\int_S f(x)\,\mathrm{d}O := \int_B f(x(u,v))\,\|x_u \times x_v\|\,\mathrm{d}(u,v).$$

Dabei ist $\int_S f(x)\,\mathrm{d}O$ unabhängig von der Wahl der Parametrisierung (was man mit der Transformationsformel für das Riemannschen Integral über reguläre Bereiche nachrechnen kann).

Folgerung 12.40 *Sei $D \subset R^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich, $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück. Seien f, f_1 und $f_2\colon S \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Analog zum Riemannschen Integral über reguläre Bereiche in $\mathbb{R}^2$ gilt analog:*

1. Linearität: $\int_S (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\,\mathrm{d}O = \alpha_1 \int_S f_1\,\mathrm{d}O + \alpha_2 \int_S f_2\,\mathrm{d}O.$

2. Monotonie: *Gilt $f_1(x) \le f_2(x)$ für alle $x \in S$, so gilt auch $\int_S f_1\,\mathrm{d}O \le \int_S f_2\,\mathrm{d}O$.*

3. Bereichsadditivität: *Seien $S_1, \ldots, S_k \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächenstücke so das die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ für $i \neq j$ nur aus endlich vielen Kurven bestehen. Für $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$ gilt*

$$\int_S f(x)\,\mathrm{d}O = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} f(x)\,\mathrm{d}O.$$

4. Mittelwertsatz: *Für reguläre Flächenstücke S gibt es stets ein $x_0 \in S$ mit $\int_S f\,\mathrm{d}O = f(x_0) \int_S 1\,\mathrm{d}O$.*
(Vorsicht, dies braucht nicht mehr zu gelten, wenn S nicht zusammenhängend ist; zum Beispiel, wenn S aus mehreren regulären Flächenstücken zusammengesetzt ist!)

Definition 12.41 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück. Die Größe $|S| := \int_S 1\,\mathrm{d}O$ nennt man den *Flächeninhalt von S*.

Wir gehen zunächst ein paar Beispiele durch.

Beispiel 12.42
1. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich und $f\colon B \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Der Graph graph(f) von f über B ist die durch

$$x\colon B \to \mathbb{R}^3, \quad x(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

parametrisierte reguläre Fläche. Wir erhalten $x_u = (1, 0, f_u)^\mathsf{T}$ und $x_v = (0, 1, f_v)^\mathsf{T}$ und

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_v f_u & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}, \qquad \sqrt{\det(g)} = \sqrt{(1 + f_u^2)(1 + f_v^2) - f_u^2 f_v^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Etwas kürzer hätte man auch rechnen können

$$\sqrt{\det(g)} = \|x_u \times x_v\| = \|(-f_u, -f_v, 1)^\mathsf{T}\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Wir erhalten für den Flächeninhalt eines Graphen also

$$|\mathrm{graph}(f)| = \int_B \sqrt{1 + f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2}\, \mathrm{d}(u, v)$$

2. Mit der obigen Formel können wir z.B. den Flächeninhalt des durch $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $0 \leq x_2 \leq 4$ gebenen Paraboloidabschnittes S berechnen. Als regulären Bereich wählen wir die Kreisscheibe $B := \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(u, v)\| \leq 2 \}$ und die Funktion $f(u, v) := u^2 + v^2$, so dass wir $S = \mathrm{graph}(f)$ erhalten. Nun können wir wie folgt mit Polarkoordinaten rechnen:

$$|S| = \int_B \sqrt{1 + (2\,u)^2 + (2\,v)^2}\, \mathrm{d}(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4\,r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = 2\,\pi \int_0^2 r\, \sqrt{1 + 4\,r^2}\, \mathrm{d}r.$$

Mit der Substitution $z = 1 + 4\,r^2$ kommen wir auf $r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{8}\,\mathrm{d}z$ und erhalten

$$|S| = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} \sqrt{z}\, \mathrm{d}z = \frac{2\,\pi}{3} \Big[z^{\frac{3}{2}} \Big]_{z=1}^{z=17} = \frac{2\,\pi}{3} \Big(17^{\frac{3}{2}} - 1 \Big).$$

3. Eine weitere wichtige Klasse von Flächen stellen die Rotationsflächen dar: Für eine positive, stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a, b] \to\,]0, \infty[$ betrachten wir das durch

$$x\colon [a, b] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad x(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ f(u)\, \cos(v) \\ f(u)\, \sin(v) \end{pmatrix}$$

parametrisierte Flächenstück $S = x(B)$, wobei $B := [a, b] \times [-\pi, \pi]$. Damit ist S also die Rotationsfläche, die durch die Kurve $u \mapsto (u, 0, f(u))$ beim Rotieren um die erste Koordinatenachse überstrichen wird. Diesmal erhalten wir

$$x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(u)\, \cos(v) \\ f'(u)\, \sin(v) \end{pmatrix}, \quad x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u)\, \sin(v) \\ f(u)\, \cos(v) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_u \times x_v = \begin{pmatrix} f(u)\, f'(u) \\ -f(u)\, \cos(v) \\ -f(u)\, \sin(v) \end{pmatrix},$$

also $\|x_u \times x_v\| = f(u)\, \sqrt{1 + f'(u)^2}$. Der Flächeninhalt von S beträgt also

$$\begin{aligned} |S| &= \int_B f(u)\, \sqrt{1 + f'(u)^2}\, \mathrm{d}(u, v) = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \sqrt{1 + f'(u)^2}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u \\ &= 2\,\pi \int_a^b f(u)\, \sqrt{1 + f'(u)^2}\, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

12.2 Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche

Definition 12.43 (Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche)
Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit Parameterisierung $x\colon B \to \mathbb{R}^3$ und sei $F\colon S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Die Größe

$$\int_S F \cdot \mathrm{d}\vec{O} := \int_S F(x) \cdot n(x)\,\mathrm{d}O$$

nennt man den *Fluss von F durch S*. Hierbei ist $n\colon S \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$n(x(u,v)) := \frac{x_u(u,v) \times x_v(u,v)}{\|x_u(u,v) \times x_v(u,v)\|}$$

das *(orientierte) Normalenvektorfeld von S*. Für konkrete Berechnungen können die folgenden Identitäten nützlich sein:

$$\begin{aligned}\int_S F \cdot \mathrm{d}\vec{O} &= \int_B F(x(u,v)) \cdot (x_u(u,v) \times x_v(u,v))\,\mathrm{d}(u,v)\\ &= \int_B \det\Big(x_u(u,v), x_v(u,v), F(x(u,v))\Big)\,\mathrm{d}(u,v).\end{aligned}$$

12.3 Integralsatz von Green

Definition 12.44 (Wegintegral über Rand eines regulären Bereichs)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $F\colon M \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, $B \subset D$ ein regulärer Bereich mit Rand ∂B. Da B ein regulärer Bereich ist, gibt es endlich viele Kurven $\gamma_i\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$, die gemeinsam den Rand ∂B einmal im mathematisch positiven Sinne umlaufen, das heißt, der Vektor $N_i(t)$, den man aus $\gamma_i'(t)$ durch 90°-Rotation im Uhrzeigersinn erhält, zeige aus dem Bereich B *hinaus*. Dann ist das *Wegintegral* von F entlang des Randes ∂B definiert durch

$$\oint_{\partial B} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x} := \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} F(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Satz 12.45 (Integralsatz von Green) *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein regulärer Bereich und sei $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\oint_{\partial B} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_B \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\Big)\,\mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Proof. Wir rechnen das für das Beispiel eines Rechteckes $B = [a, b] \times [c, d]$ explizit durch. Der allgemeine Fall folgt dann, indem man das Gebiet mit einer Folge von geeignet gewählten Rechtecken ausschöpft.

Wir parametrisieren den Rand des Rechtecks durch die Kurven

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [c, d]$$
$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} a + b - t \\ d \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b] \qquad \gamma_4(t) = \begin{pmatrix} a \\ c + d - t \end{pmatrix}, \quad t \in [c, d].$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\gamma_2} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \int_{\gamma_4} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \int_{\gamma_1} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \int_{\gamma_3} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} \\
&= \int_c^d \begin{pmatrix} F_1(b, x_2) \\ F_2(b, x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_2 + \int_c^d \begin{pmatrix} F_1(a, x_2) \\ F_2(a, x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_2 \\
&\quad + \int_a^b \begin{pmatrix} F_1(x_1, c) \\ F_2(x_1, c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 + \int_a^b \begin{pmatrix} F_1(x_1, d) \\ F_2(x_1, d) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_c^d \Big(F_2(b, x_2) - F_2(a, x_2)\Big)\,\mathrm{d}x_2 - \int_a^b \Big(F_1(x_1, d) - F_1(x_1, c)\Big)\,\mathrm{d}x_1.
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und erhalten

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial B} F \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_a^b \int_c^d \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2)\Big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_B \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\Big)\,\mathrm{d}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

□

12.4 Zirkulation und Wirbelstärke

Definition 12.46 (Wegintegral über Rand eines regulären Flächenstücks)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, $S \subset M$ ein reguläres Flächenstück mit stetigem Normalenfeld $n\colon S \to \mathbb{R}^3$ und Rand ∂S. Es gibt also endlich viele Kurven $\gamma_i\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, k$, die gemeinsam den Rand einmal im positiven Sinn umlaufen, das heißt, der Vektor $\gamma_i'(t) \times n(\gamma_i(t))$ zeige aus der Fläche *hinaus*. Dann ist das *Wegintegral* von F entlang des Randes ∂S definiert durch

$$\oint_{\partial S} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} F(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Streng genommen hängt das Vorzeichen des Wegintegrals von der Wahl des Normalenfeldes ab! (Davon gibt es immer genau zwei verschiedene.)

Definition 12.47 (Zirkulation, Wirbelstärke) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine offende Menge und $F\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $r \subset M$ eine (stückweise) reguläre, orientierte, geschlossene Kurve mit Parametrisierung $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Als *Zirkulation von F entlang r* bezeichnet man die Größe

$$Z \coloneqq \oint_r F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F(x(t)) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sei nun $x_0 \in M$ ein fester Punkt und $n \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Wir betrachten für den Moment nur orientierte, reguläre Flächenstücke $A \subset M$ mit Rand ∂A, die x_0 als inneren Punkt enthalten und an jedem Punkt den Vektor n als Flächennormale besitzen. Wir definieren die *Wirbelstärke* des Vektorfeldes F bezüglich n am Punkt x_0 durch den Grenzwert

$$W_n(x_0) \coloneqq \lim_{\substack{x_0 \in A \subset B_\varrho(x_0) \\ n \perp A \\ \varrho \to 0}} \frac{1}{|A|} \oint_{\partial A} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x},$$

wobei $B_\varrho(x_0)$ den Ball mit Radius ϱ um x_0 bezeichne.

Merkregel 12.48 Es gilt stets

$$W_n(x_0) = n \cdot \operatorname{rot} F(x_0).$$

Zum Nachweis vereinfachen wir die Situation durch eine geeignete Rotation und eine Verschiebung dahingehend, dass $n = (0, 0, 1)^\mathsf{T}$ und $x_0 = (0, 0, 0)^\mathsf{T}$. Damit liegt sowohl das reguläre Flächenstück A als auch seine Randkurve ∂A in der durch die ersten beiden Koordinatenachsen aufgespannten x_1-x_2-Ebene. Die Parametrisierung x von ∂A hat dann die Form $x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)^\mathsf{T}$

Nun rechnet man mit dem Greenschen Integralsatz:

$$\frac{1}{|A|}\oint_{\partial A} F(x)\cdot\,\mathrm{d}\vec{x} \overset{\text{Green}}{=} \frac{1}{|A|}\int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\Big)\,\mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Da der letzte Integrand stetig ist, können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung benutzen und finden einen Punkt $x_*(A) \in A$ mit

$$\frac{1}{|A|}\int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\Big)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_*(A)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_*(A)) = n\cdot\operatorname{rot} F(x_*(A)).$$

Geht nun ϱ gegen 0, so muss auch $x_*(A)$ gegen x_0 konvergieren (denn $\|x_*(A) - x_0\| \leq \varrho$) und man erhält (weil $\operatorname{rot} F$ noch stetig ist)

$$W_n(x_0) = \lim_{\substack{x_0\in A\subset B_\varrho(x_0)\\ n\perp A\\ \varrho\to 0}} \frac{1}{|A|}\oint_{\partial A} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \lim_{\substack{x_0\in A\subset B_\varrho(x_0)\\ n\perp A\\ \varrho\to 0}} n\cdot\operatorname{rot} F(x_*(A)) = n\cdot\operatorname{rot} F(x_0).$$

12.5 Integralsatz von Stokes

Satz 12.49 (Integralsatz von Stokes)
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F\colon M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $S \subset M$ ein reguläres Flächenstück mit Rand ∂S. Dann gilt

$$\oint_{\partial S} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \oint_S \operatorname{rot} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{O}.$$

In Worten:
Die Zirkulation entlang der Randkurve ist gleich dem Integral der Wirbelstärken auf der Fläche.

Proof. (Skizze) Zu gegebenem $\varrho > 0$ zerlegt man das Flächenstück S in reguläre, orientierte Flächenstücke $S_1, \dots S_{k(\varrho)}$ mit Durchmesser kleiner als ϱ, so dass wann immer sich zwei verschiedene Flächenstücke S_i und S_j schneiden, die dies nur auf ihrem Rand tun und die Randstücke von ∂S_i und ∂S_j auf ihrem Schnitt jeweils *unterschiedlich* orientiert sind. Man erhält dann

$$\oint_{\partial S} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \sum_{j=1}^{k(\varrho)}\oint_{\partial S_j} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{x}.$$

Zu jedem dieser Flächenstücke wählt man einen Punkt $x_j \in S_j \subset S$ und bezeichnet mit n_j die Flächennormale an S (und damit an S_j) am Punkt x_j. Nach Definition der Wirbelstärke haben wir nun

$$\oint_{\partial S_j} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{x} \approx W_{n_j}(x_j)\cdot|S_j| = n_j\cdot\operatorname{rot} F(x_j)\,|S_j| \approx \int_{S_j}\operatorname{rot} F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{O}.$$

Summiert man über alle Flächenstücke, so erhält man

$$\oint_{\partial S} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \approx \sum_{j=1}^{k(\varrho)} \int_{S_j} \operatorname{rot} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{O}$$

und diese Approximation wird umso besser, je kleiner die Flächenstücke werden. Im Limes $\varrho \to 0$ hat man schließlich

$$\oint_{\partial S} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \lim_{\varrho \to \infty} \sum_{j=1}^{k(\varrho)} \int_{S_j} \operatorname{rot} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \int_S \operatorname{rot} F(x) \cdot \mathrm{d}\vec{O}. \qquad \square$$