Analysis III
TUHH
VL 14, 2. Februar 2017

Stokes und Gauß Integralsatz

Michael Hinze

Satz von Stokes

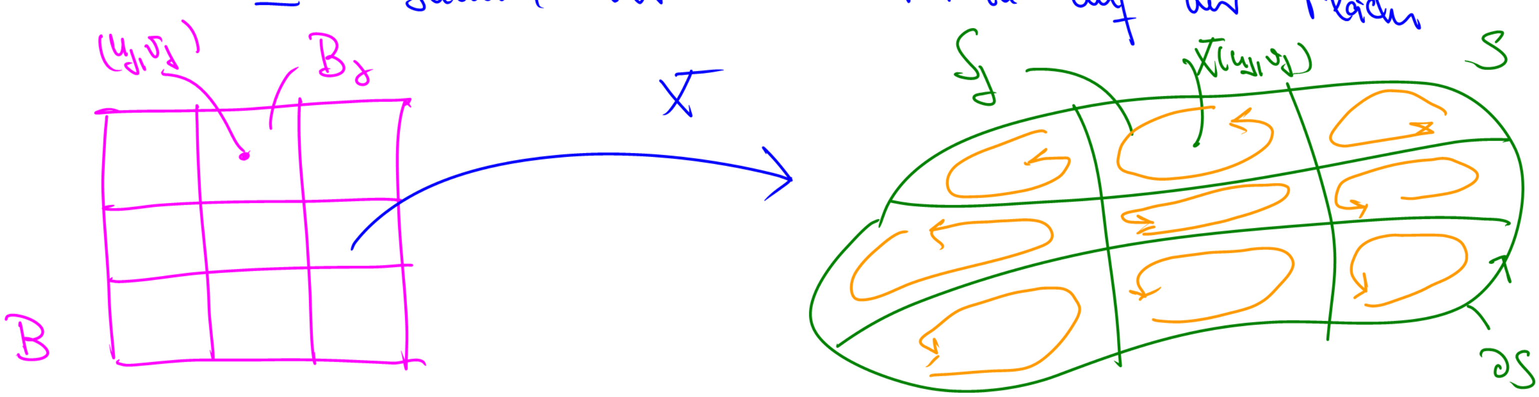
$F: M \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbares VF, $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und $S \subset \mathbb{R}^3$ reguläres Flächenstück in M mit Randkurve ∂S, die in Bezug auf die Normalenrichtung positiv orientiert ist.

Dann gilt

$$\int_{\partial S} F(x) \cdot dx = \int_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma$$

Zirkulation eines VF entlang des Randes einer Fläche

$\widehat{=}$ Summe der Wirbelstärken auf der Fläche



$$\oint_{\partial S} F(x)\cdot dx = \sum_{j=1}^{m} \oint_{\partial S_j} F(x)\cdot dx \qquad \text{und}$$

Rechenregel für Kurvenintegrale

Siehe Def. Wirbelstärke

$$\int_{\partial S_j} F(x)\cdot dx \approx \eta_j \operatorname{rot} F(x_j)\, |S_j|$$

$$= \overbrace{\frac{X_u(u_j,v_j)\times X_v(u_j,v_j)}{\| X_u(u_j,v_j)\times X_v(u_j,v_j)\|} \operatorname{rot} F(X(u_j,v_j))}^{=:\,(*)} \int_{B_j} \| X_u(u,v)\times X_v(u,v)\|\, d(u,v)$$

MWS: $\int_S f(x)\, d\sigma = f(x_0)\int_S 1\, d\sigma = f(x_0)\,|S|$ für ein $x_0 \in S$.

$x_0 := X(u_j,v_j)$ und $f(x_0) = (*)$. Damit

$$\int_{\partial S_j} F(x)\cdot dx \approx \int_{S_j} \operatorname{rot} F(X)\cdot \eta(X)\, d\sigma = \int_{S_j} \operatorname{rot} F(x)\cdot d\sigma$$

Summation ergibt $\displaystyle\int_{\partial S} F(x)\cdot dx = \int_S \operatorname{rot} F(x)\cdot d\sigma.$

Folgerung: Satz von Stokes impliziert den Satz von Green, denn sei

S in x_1-x_2 Ebene mit Rand ∂S. $F: S \to \mathbb{R}^2$ fortsetzen nach $\mathbb{R}^3$: $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

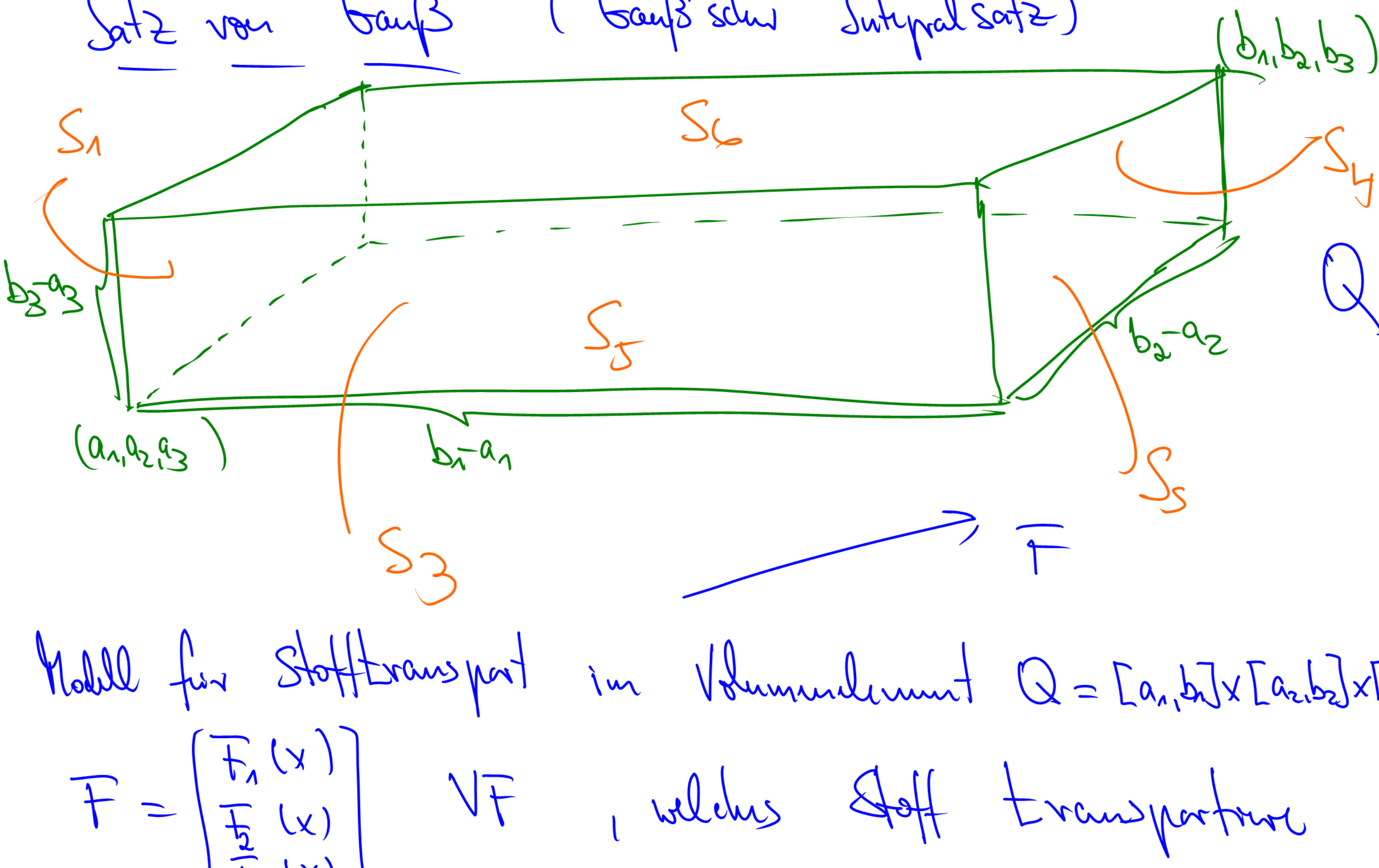
Stokes: $\displaystyle\int_{\partial S} F(x)\cdot dx = \int_S \operatorname{rot} F(x)\cdot d\sigma$

$$= \int_S \operatorname{rot} F(\gamma(x)) \cdot \nu(x) \, d\sigma \qquad \text{mit} \qquad \nu(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \int_S F_{2x_1} - F_{1x_2} \, d\sigma = \int_S F_{2x_1} - F_{1x_2} \, d(x_1,x_2) \,, \quad \text{wobei}$$

S durch sich selbst parametrisiert wird, d.h. $\gamma(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$.

<u>Satz von Gauß</u> (Gauß'scher Integralsatz)



Modell für Stofftransport im Volumenelement $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$

$F = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{bmatrix}$ VF , welches Stoff transportiert

Transport nach Q / von Q kann nur über die Oberfläche von Q passieren. (Q enthält keine Quellen/Senken)

$$S_1 = \{ (a_1, x_2, x_3) \,;\; a_2 \le x_2 \le b_2 \,,\; a_3 \le x_3 \le b_3 \}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$S_6 = \{ (x_1, x_2, b_3) \,;\; a_1 \le x_1 \le b_1 \,,\; a_2 \le x_2 \le b_2 \}$$

Bilanz des Transports über S_1 und S_2

$$\int_{S_1} F \cdot d\sigma + \int_{S_2} F \cdot d\sigma = \int_{S_1} F(x) \cdot (-e_1) \, d\sigma + \int_{S_2} F(x) \, e_1 \, d\sigma$$

$$= \underbrace{- \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} F_1(a_1, x_2, x_3) \, dx_3 \, dx_2}_{=: -g(a_1)} + \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} F_1(b_1, x_2, x_3) \, dx_3 \, dx_2}_{g(b_1)}$$

Wir wissen: $\quad g(b_1) - g(a_1) = \int_{a_1}^{b_1} \underbrace{g'(x)}_{F_{1 x_1}} \, dx$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} F_{1 x_1}(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 = \int_{S_1} F \cdot d\sigma + \int_{S_2} F \cdot d\sigma$$

Analog $\quad \int_{S_3} F \cdot d\sigma + \int_{S_4} F \cdot d\sigma = \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} F_{2 x_2}(x_1, x_2, x_3) \, dx_2 \, dx_1 \, dx_3$

und $$\int_{S_5} F\cdot d\sigma + \int_{S_6} F\cdot d\sigma = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_{3_{x_3}}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\,dx_2\,dx_1$$

Insgesamt:

$$\int_{\partial Q} F\cdot d\sigma = \sum_{j=1}^{6}\int_{S_j} F\cdot d\sigma$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} \underbrace{F_{1_{x_1}}(x_1,x_2,x_3) + F_{2_{x_2}}(x_1,x_2,x_3) + F_{3_{x_3}}(x_1,x_2,x_3)}_{\operatorname{div} F(x)}\,dx$$

$$= \int_Q \operatorname{div} F(x)\,dx$$

Sei B regulärer Bereich im $\mathbb{R}^3$ mit äußeren Normalen η

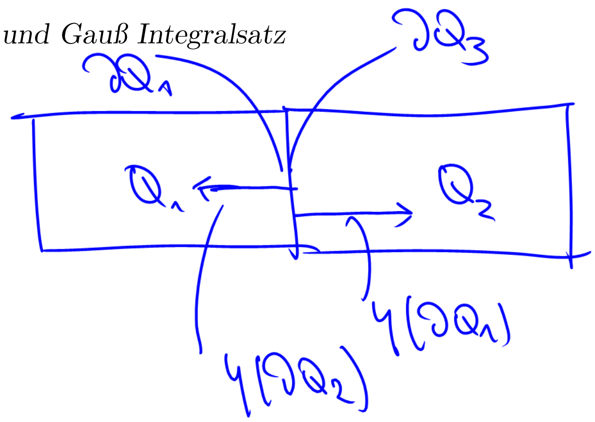
Dann $$\int_B \operatorname{div} F(x)\,dx = \int_{\partial B} F\cdot d\sigma$$

$$= \int_{\partial B} F(x)\cdot \eta(x)\,d\sigma$$

Gauß'scher Integralsatz.

" $$\int_B = \sum_i \int_{Q_i} = \sum_i \int_{\partial Q_i} = \sum \int_{\partial Q_{\text{Rand}}}$$

und inneren Oberflächenintegrale fallen weg $Q_{\text{Randquader}}$



$$\psi(\partial Q_1) = -\psi(\partial Q_2)$$

Anwendung: Wärmestrom über ∂B entspricht der in B von Quelle und Senke erzeugten Wärme

Wärmequelle/Senke : $f(x)$

Wärmestrom : $q(x)$

$$\int_{\partial B} q \cdot d\sigma = \int_B f(x)\, dx$$

Gauß $\parallel$ $\qquad$ // $\qquad$ d.h. $\operatorname{div} q(x) = f(x)$ in B

$$\int_B \operatorname{div} q(x)\, dx$$

Modell für Wärmestrom abhängig von Temperatur T

$$q = -\kappa \nabla T$$

κ Wärmeleitfähigkeit (Material abhängig)

Damit $\quad \operatorname{div} q = -\operatorname{div}(\kappa \nabla T) = f \quad$ in B

D.h. Temperaturausbreitung ist Diffusionsprozess

$$- \operatorname{div}(k(x) \nabla T(x)) = f(x) \quad \text{in } B$$

elliptische partielle DGL für T !

$\rightsquigarrow$ nächstes Semester