

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 1

#### Aufgabe 1:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

$$\text{a) } \mathbf{x}_n = \left( \frac{3n}{3^n}, \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{b) } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_n \cos y_n}{\sqrt{2}} \\ \frac{3y_n \cos x_n}{4} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Hinweis:* Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

#### Aufgabe 2:

Man zeichne die folgenden Mengen und prüfe, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind:

$$\text{a) } P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x < y \leq 24 - 2x^2 \right\},$$

$$\text{b) } E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 16 \right\},$$

$$\text{c) } R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 5 \wedge 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \right\},$$

$$\text{d) } K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die Kurve  $\mathbf{c} : [0, 8\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 3 \sin t \\ 4t \end{pmatrix}.$$

- Man zeichne die Kurve  $\mathbf{c}$ .
- Man berechne für  $\mathbf{c}$  die Bogenlänge und gebe die Tangentengleichung im Punkt  $t = 4\pi$  an.
- Man berechne für  $\mathbf{c}$  den Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor.
- Im Punkt  $t = 4\pi$  gebe man die Parameterform der Schmiegebene an und berechne dort den Krümmungsvektor und die Krümmung.

**Aufgabe 4:**

Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y)$$

zeichne man den Funktionsgraphen und die Höhenlinien, dies sind Linien konstanter Höhe, d.h. von der Form  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$  für  $c \in \mathbb{R}$ . Man überprüfe, ob  $f$  stetig ist oder in eventuell vorhandenen Definitionslücken stetig ergänzt werden kann.

- $f(x, y) = y + 3$ ,
- $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,
- $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,
- $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ,
- $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ .

**Abgabetermin:** 23.10. - 27.10.2017 (zu Beginn der Übung)