

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Man zeichne die Funktion im Bereich $[-0.05, 0.05] \times [-0.05, 0.05]$.
- Man überprüfe, ob f stetig ist.
- Man berechne $\mathbf{J} f(x, y)$.
- Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.
- Sind die partiellen Ableitungen stetig?

Aufgabe 10:

- Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{f}_2} \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix}.$$

- Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \mapsto g(u, v).$$

Aufgabe 11:

- a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
- (i) Man bestimme die Tangentialebene $T_1(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1/4, 0)$.
 - (ii) Man zeichne f und die Tangentialebene T_1 im Quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
 - (iii) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(0, 0)$.
- b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = xz - y^2$$

mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$. Man bestimme für (x_0, y_0, z_0) den Funktionswert von f , berechne eine Funktionswertnäherung für $f(3.1, -1.2, 1.9)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials in (x_0, y_0, z_0) und vergleiche diese mit $f(3.1, -1.2, 1.9)$.

Aufgabe 12:

- a) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ der folgenden Funktion

$$f(x, y, z) = x - y + (x - z)^2 + (y - z)^3.$$

- b) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades für die Funktion

$$f(x, y) = (y + \cos y) \sin x$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ verwendet, nach oben ab.

Abgabetermin: 20.11. - 24.11.2017 (zu Beginn der Übung)